

**Geeignete Vereinfachungen für die Lösung des Traglastproblems
der ausmittig gedrückten prismatischen Stahlbetonstütze
mit Rechteckquerschnitt**

Von der Fakultät für Bauwesen
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

70.135E

**Universitätsbibliothek
der
Technischen Universität
Braunschweig**

von

Dipl.-Ing. Ulrich Q u a s t

aus

Buschdorf, Krs. Flatow

1970

Eingereicht am: 27. November 1968

Mündliche Prüfung am: 23. Juni 1969

Referent: o. Prof. Dr.-Ing. Karl Kordina

Korreferent: o. Prof. Dr.-Ing. Heinrich Paschen

Vervielfältigungen der Arbeit oder von Teilen aus ihr
bedürfen der ausdrücklichen Genehmigung des Verfas-
sers.

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Assistentenzeit an der Technischen Universität in Braunschweig als Mitarbeiter von Prof. Dr.-Ing. Karl Kordina.

Als wesentliche Förderung meiner Arbeit empfand ich den Umstand, als Assistent über Zeit zu eigener wissenschaftlicher Tätigkeit zu verfügen, in Verbindung mit der Möglichkeit, mich des zeitgemäßen Hilfsmittels eines leistungsfähigen Elektronenrechners bedienen zu können. Den Damen und Herren des Auftragsdienstes im Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt, die mir als auswärtigem Benutzer die Arbeit mit der IBM 7094 ganz wesentlich erleichterten, danke ich aufrichtig.

Am förderlichsten aber war mir zweifellos das Vertrauen von Herrn Prof. Kordina, der mich verantwortlich mit der Durchführung eines inhaltlich verwandten und vom Deutschen Ausschluß für Stahlbeton finanziell geförderten Forschungsvorhabens betraute und mich außerdem weitgehend zur Mitarbeit bei den Beratungen zur Neufassung der Normenvorschrift DIN 1045 und den Empfehlungen des Comité Européen du Béton heranzog. Dadurch boten sich mir viele Möglichkeiten zu vertiefter wissenschaftlicher Diskussion des behandelten Problems.

In meinen Dank möchte ich die Herren Professoren Duddeck und Paschen einschließen, denen mit Herrn Prof. Kordina die verantwortungsvolle Aufgabe der fachlichen Wertung dieser Arbeit zukam.

Wichtiger als der Dank, der an dieser Stelle nur mit Worten möglich ist, war mir als Zeichen wirklicher Dankbarkeit für die mannigfaltige Förderung das stete Bemühen zur Lösung der selbstgestellten wissenschaftlichen Aufgabe. So fühlte ich mich verpflichtet, den einem wissenschaftlichen Assistenten zur Verfügung

stehenden freien Wirkungsbereich voll auszufüllen.
Ich konnte feststellen, daß dieser Raum nicht zwangsläufig sehr eingeengt zu erscheinen braucht, wenn man uneigennützig und an der Sache orientiert zu Werke geht.

Ich werde gerne an die Zeit zurückdenken, während der diese Arbeit entstand.

Hamburg, den 14.2.1970

Inhaltsverzeichnis

	Seite
A. Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen	7
B. Textteil	
1. Einleitung	11
2. Analytische Behandlung des ausmittig gedrückten Stabes für eine lineare Moment-Krümmungsbeziehung	13
2.1 Analytische Lösung der Differentialgleichung	13
2.2 Anwendung auf die Stahlbetonstütze	16
3. Numerische Behandlung des ausmittig gedrückten Stabes für beliebige Elastizitätsgesetze	18
3.1 Allgemeines	18
3.2 Verfahren zur Bestimmung des Moment-Krümmungszusammenhanges	18
3.3 Verfahren zur Traglastbestimmung	24
3.4 Angaben über die Genauigkeit numerischer Verfahren	32
4. Der frei drehbare, unverschiebbliche Stab mit gleich großen Lastausmitten an den Stabenden	35
4.1 Vereinfachung der Verformungsberechnung für nichtlineare Moment-Krümmungsbeziehungen des Stahlbetons	35
4.2 Gleichgewichts- und Traglastzustand der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze	49
4.3 Bestimmung der Bereiche mit voneinander verschiedenen Kriterien für den Traglastzustand	61
4.4 Vereinfachungen des Traglastproblems durch Festlegung eines ersatzweise geltenden einheitlichen Traglastkriteriums	78
5. Der frei drehbare, unverschiebbliche Stab mit ungleichen Lastausmitten an den Stabenden	94
5.1 Die Methode der Ersatzlastausmitte	94
5.2 Ersatzstab für die Stiele eines unverschiebblichen Rahmens	96
5.3 Rechenbeispiele	104
5.4 Zusätzliche Angaben zur Durchführung der Bemessungsaufgabe	109

	Seite
6. Der einseitig eingespannte, frei verschiebbliche Stab	113
7. Zusammenfassung	118
C. Schrifttumsangaben	121

A. Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen

In der Zusammenstellung sind diejenigen Bezeichnungen nicht enthalten, die sich durch Hinzufügen eines "Δ" als Differenz- oder Teilabschnittsgröße von originären Größen ableiten oder die durch Hinzufügen eines "d" oder "∂" als differentiale Größen zu eben solchen originären Größen gekennzeichnet sind. Eine Reihe von Größen, die zur speziellen Unterscheidung mit Zusätzen "max", "grenz" oder "ges" versehen wurden, benötigen ebenfalls keiner zusätzlichen Erklärung. Darüber hinaus werden Größen, die den zusätzlichen Index "krit" erhielten, auch ohne diesen Index verwendet, wenn er auf Grund des Beirates erforderlich ist.

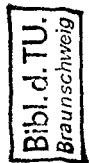
A B C	}	Konstanten in der Lösungsfunktion für die Lastausmitte e
E _s		Elastizitätsmodul für Stahl
EI		Biegesteifigkeit
F		Faktor zur Berechnung der Stabverformung
Fe		Fläche der Stahlsugbewehrung
Fe'		Fläche der Stahldruckbewehrung
H		Horizontalkraft
H _U		Horizontalkraft im Erschöpfungszustand
I _R		Trägheitsmoment der Rahmenriegel
K		Stabkrümmung
K _R		Stabkrümmung bei Beginn des Aufreißens des Stahlbetonquerschnittes
K _U		Stabkrümmung im Erschöpfungszustand
K _e		Stabkrümmung am Stabende bei gleichen Endausmitten der Last
K _m		Stabkrümmung im meistbeanspruchten Querschnitt m
K _O		Stabkrümmung am Stabende o
K _s		Stabkrümmung am Stabende s
M		Biegemoment
\bar{M}		fiktives Biegemoment
M _R		Rißmoment

M_U	Biegemoment im Erschöpfungszustand
M_U^*	auf $(4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U)$ bezogener Wert von $M_U \cdot F$
M_a	belastendes äußeres Biegemoment
M_i	widerstehendes inneres Biegemoment
M_m	Biegemoment im meistbeanspruchten Querschnitt m
M_o	Biegemoment am Stabende o
M_o^*	auf $(4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U)$ bezogener Wert von $M_o \cdot F$
M_s	Biegemoment am Stabende s
M_s^*	auf $(4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U)$ bezogener Wert von $M_s \cdot F$
N	Normalkraft
N'	angenommener Näherungswert zu N
N_U	Normalkraft im Erschöpfungszustand
N_i	innere Normalkraft
N_k	Euler'sche Knicklast
N_{krit}	Traglast
\bar{F}	fiktive Belastung
R	Krümmungsradius des verformten Stabes
V	Vertikalkraft

a_1	formale Konstanten
a_2	
b	Querschnittsbreite
c	Konstante zur Bestimmung der Knotendrehung
d	Querschnittshöhe
e	Ausmitte der Last, gleichzeitig auch Ordinate in Richtung der Stabverformung
e_a	Ausmitte der äußeren Last
e_e	Lastausmitte am Stabende bei gleichen Ausmitten
e_i	Ausmitte der inneren Kraft
e_{krit}	Lastausmitte zum Traglastzustand
e_m	Lastausmitte im meistbeanspruchten Querschnitt m
e'_m	angenommener Näherungswert zu e_m
e_o	Lastausmitte am Stabende o
e_s	Lastausmitte am Stabende s
h	Abstand der Zugbewehrung vom Druckrand

h'	Abstand der Druckbewehrung vom Druckrand
l	Länge der Biegehalbwelle
m	auf $(b \cdot d^2 \cdot \beta_R)$ bezogenes Biegemoment M
m_U	m im Erschöpfungszustand
m_o	m am Stabende o
m_s	m am Stabende s
n	auf $(b \cdot d \cdot \beta_R)$ bezogene Normalkraft N
n_U	n im Erschöpfungszustand
n_o	n am Stabende o
n_s	n am Stabende s
s	Stablänge
s_k	Knicklänge nach Euler
s_{krit}	größte im Traglastzustand noch mögliche Stablänge
s_n	numerisch errechnete Stablänge s
s_o	Länge des Stababschnittes $o-m$
s_s	Länge des Stababschnittes $s-m$
v	Stabverformung
v_m	Stabverformung an der Stelle des meistbeanspruchten Querschnitts m
$v(N)$	näherungsweise errechneter Wert v
w	Verformung des Stabelementes Δs
x	Ordinate in Richtung der Stabachse
x_D	Druckzonenhöhe des Stahlbetonquerschnitts
z	Ordinate senkrecht zur Verformungsebene
α	Rechengröße $\alpha = \sqrt{-\frac{N}{a_1}}$
β_R	Rechenwert der Betonfestigkeit (Prismenfestigkeit)
β_s	Rechenwert der Stahlfestigkeit (Fließspannung)
	Dehnung
ϵ_a	Dehnung des Außenrandes
ϵ_{bD}	Dehnung des Betondruckrandes
$\epsilon_{bD,U}^{(exz)}$	Dehnung des Betondruckrandes im Erschöpfungszustand bei Biegedruck im aufgerissenen Zustand
$\epsilon_{bD,U}^{(z)}$	Dehnung des Betondruckrandes im Erschöpfungszustand bei zentrischer Druckbeanspruchung
ϵ_e	Dehnung der Stahlbewehrung

ϵ_{eZ}	Dehnung der Stahl-Zugbewehrung	
$\epsilon_{eZ,U}$	Dehnung der Stahl-Zugbewehrung im Erschöpfungs- zustand	
ϵ_i	Dehnung des Innenrandes	
ϵ_s	Fließdehnung $\epsilon_s = \frac{\beta_s}{E_s}$	
φ	Stabneigungswinkel	
μ	geometrischer Bewehrungsgehalt	$\mu = \frac{F_e}{b \cdot d}$
ω	mechanischer Bewehrungsgehalt	$\omega = \frac{F_e \cdot \beta_s}{b \cdot d \cdot E_R}$
ψ	Knotendrehwinkel	
σ	Spannung	
σ_m	mittlere Spannung bei nichtlinearer Spannungs- verteilung in der Betondruckzone	
ξ	auf die Druckzonenhöhe x_D bezogener Abstand der Betondruckkraft von der Dehnungs-Nulllinie	



1. Einleitung

Das Traglastproblem des ausmittig gedrückten Stahlbetonstabes kann fallweise unterschiedlich entweder in einem reinen Festigkeitsproblem bestehen, das allerdings nach Theorie II. Ordnung zu behandeln ist, oder aber in einem Stabilitätsproblem. Die Art des hier auftretenden Stabilitätsproblems sollte streng von dem Stabilitätsproblem des planmäßig mittig gedrückten Stabes unterschieden werden, das allgemein als das Problem der Stabknickung verstanden wird und das dadurch gekennzeichnet ist, daß zu dem Stab bis zur Erreichung einer kritischen Last immer die krümmungsfreie Gleichgewichtslage gehört. Unter der kritischen Last ist dann auch eine andere als die krümmungsfreie Gleichgewichtslage möglich, das Gleichgewicht verzweigt in einen ausgebogenen Zustand, mit dem in praktischen Fällen ein Versagen des Stabes verknüpft ist.

Dem ausmittig gedrückten Stahlbetonstab ist zu jeder Belastung eine andere, und zwar ganz bestimmte ausgebogene Gleichgewichtslage zuzuordnen. Das mögliche Stabilitätsproblem besteht hier nicht darin, daß in eine grundsätzlich andere Form der Gleichgewichtslage verzweigt wird, sondern darin, daß die Gleichgewichtslage indifferent wird für eine Änderung nur der Biegelinie bei unveränderter Last und labil bei Erhöhung der Belastung.

Die bisherige Art der Behandlung des Traglastproblems der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze in der Praxis hat weniger zu einer Unterscheidung zwischen diesen beiden genannten Stabilitätsproblemen beigetragen, als vielmehr den Unterschied eher dadurch verschleiert, daß auch im Zusammenhang mit der ausmittig gedrückten Stütze von Knicklängen, Knicklast oder auch ganz allgemein von Knicksicherheitsnachweis gesprochen wurde. Die Verwendung dieser dann irreführenden Begriffe sollte besser auf die klassische Knicktheorie beschränkt bleiben. Hier wurde das Stabilitätsproblem zuerst gelöst. Die ersatzweise gemachten An-

leihen bei der klassischen Knicktheorie sind nur so zu begründen, daß lange Zeit die Grundlagen zur wirklichkeitsnahen Behandlung verformungsabhängiger Probleme im Stahlbetonbau fehlten und die Behandlung dieser Probleme in der nichtlinearen Elastizitätstheorie derartig aufwendig werden, daß stets nur Lösungen in begrenzter Zahl möglich waren.

Das Aufkommen leistungsfähiger, programmierbarer Rechner hat hier Abhilfe geschaffen. Für die Aufnahme in der Praxis ist es aber unerlässlich, daß die auf Elektronenrechnern vollziehbaren Prozesse sinnvoll vereinfacht und von einem akademisch gebildeten Ingenieur im Rahmen der Projektbearbeitung durchgeführt werden können. Daß derartige, sogar sehr weitgehende Vereinfachungen möglich sind, ohne dabei jedoch das Wesen des Traglastproblems der ausmittig gedrückten Stütze in nichtssagende empirisch gewonnene Formeln unerkennbar zu verdrängen oder gar zu verfälschen, soll die vorliegende Arbeit zeigen. Die grundsätzlichen Verfahren von Rechnerprogrammen zur Lösung des Traglastproblems werden zu Beginn erläutert. Sie dienen als Werkzeug, um den schwer überschaubaren Einfluß der zahlreichen Parameter zu studieren, Vereinfachungsmöglichkeiten aufzuspüren und die Auswirkung getroffener Vereinfachungen zu belegen. Dies ist der Hauptteil der Arbeit. In einem letzten Teil wird dargelegt, wie mit den gefundenen Vereinfachungen praxisübliche Druckstäbe, insbesondere die Stiele üblicher Hochbaukonstruktionen, behandelt werden können, ohne Anleihen bei der klassischen Knicktheorie zu machen. Einen leicht spekulativen Charakter erhalten die letzten Ausführungen allerdings dadurch, daß eine lückenlose Belegung nicht möglich ist, weil hierzu die wirklichkeitsnahe Lösung des Traglastproblems nicht bloß des einzelnen Stabes, sondern ganzer Stabsysteme bekannt sein mußte, mit der heute aber erst begonnen wird.

2. Analytische Behandlung des ausmittig gedrückten Stabes für eine lineare Moment-Krümmungsbeziehung

2.1 Analytische Lösung der Differentialgleichung

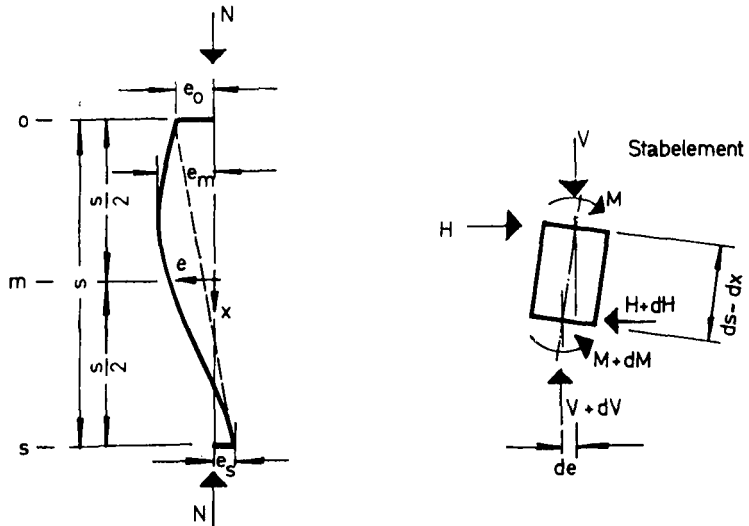


Abbildung 1 System des ausmittig gedrückten Stabes
(verformter Zustand)

Von den 3 Gleichgewichtsbedingungen des Stabelementes ds eines Stabes nach Abbildung 1, der ausschließlich durch Normalkräfte in den Endquerschnitten belastet ist, führen 2 zu den trivialen Aussagen:

$$dV = 0 \quad \rightarrow \quad V = \text{const} = N$$

$$\text{und} \quad dH = 0 \quad \rightarrow \quad H = \text{const} = 0.$$

Die dritte Gleichgewichtsbedingung heißt dann:

$$dM - V \cdot de = 0,$$

oder

$$(1) \quad M(x) - N \cdot e(x) = 0.$$

Bei Verwendung der üblicherweise in der technischen Balkenbiegelehre benutzten vereinfachten Beziehung

zwischen Krümmungsradius R und der Stabkrümmung K ,

$$(2) \quad \frac{1}{R} = K = \frac{e''}{[1+(e')^2]^{3/2}} \sim e'',$$

kann Gleichung (1) für einen linearen Zusammenhang zwischen Stabkrümmung K und Biegemoment M analytisch gelöst werden:

$$(3) \quad M = a_1 \cdot e'' + a_2$$

$$(4) \quad a_1 \cdot e'' - N \cdot e + a_2 = 0$$

Mit

$$(5) \quad \alpha^2 = - \frac{N}{a_1}$$

wird

$$(6) \quad e'' + \alpha^2 \cdot e + \frac{a_2}{a_1} = 0.$$

Als Lösungsansatz dieser Differentialgleichung dient:

$$(7) \quad e = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + C$$

$$(8) \quad e' = -\alpha A \sin \alpha x + \alpha B \cos \alpha x$$

$$(9) \quad e'' = -\alpha^2 A \cos \alpha x - \alpha^2 B \sin \alpha x.$$

Die Integrationskonstanten A , B und C werden aus den Randbedingungen ermittelt:

$$\text{Für } x = -\frac{s}{2} \text{ wird: } e'' = \frac{N e_0 - a_2}{a_1} = \frac{N}{a_1} \left[A \cos\left(-\frac{\kappa s}{2}\right) + B \sin\left(-\frac{\kappa s}{2}\right) \right]$$

$$(10) \quad e_0 - \frac{a_2}{N} = A \cos \frac{\kappa s}{2} - B \sin \frac{\kappa s}{2}.$$

$$\text{Für } x = \frac{s}{2} \text{ wird: } e'' = \frac{N e_s - a_2}{a_1} = \frac{N}{a_1} \left(A \cos \frac{\kappa s}{2} + B \sin \frac{\kappa s}{2} \right)$$

$$(11) \quad e_s - \frac{a_2}{N} = A \cos \frac{\kappa s}{2} + B \sin \frac{\kappa s}{2},$$

Aus (10) und (11) ergibt sich:

$$A = \frac{1}{\cos \frac{\alpha s}{2}} \left(\frac{e_0 + e_s}{2} - \frac{a_2}{N} \right)$$

und

$$B = \frac{e_s - e_0}{2 \sin \frac{\alpha s}{2}}.$$

Für $x = \frac{s}{2}$ wird: $e = e_s = \frac{e_0 + e_s}{2} - \frac{a_2}{N} + \frac{e_s - e_0}{2} + C.$

$$C = \frac{a_2}{N}$$

Für den Sonderfall gleich großer Endexzentrizitäten $e_0 = e_s$ und $a_2 = 0$ wird

$$(12) \quad e = \frac{e_0}{\cos \frac{\alpha s}{2}} \cos \alpha x.$$

Für den planmäßig mittig gedrückten Stab, $e_0 = 0$, und mit $a_1 = -EI$ liefert (12) die bekannte Lösung für die Knicklast N_k des sogenannten "Euler-Stabes".

$$e(0) = \frac{r}{\cos \frac{\alpha s}{2}} \neq r \rightarrow \cos \frac{\alpha s}{2} = 0$$

$$\alpha s = \pi = s \sqrt{\frac{N_k}{EI}}$$

$$(13) \quad N_k = \frac{EI \cdot \pi^2}{s^2}$$

Die Behandlung von Formänderungsaufgaben für ein nicht-lineares Elastizitätsgesetz ist bekanntlich erheblich mühevoller und auch nur in den einfachsten Fällen überhaupt möglich. SCHWARZ und KASPAREK haben dies neuerlich für den speziellen Fall des ausmittig belasteten Druckstabes aus Stahlbeton belegt [1].

2.2 Anwendung auf die Stahlbetonstütze

Die Biegemoment-Krümmungs-Beziehung für Stahlbeton kann die in den nachfolgenden Abbildungen 2 und 3 dargestellten charakteristischen Verläufe haben.

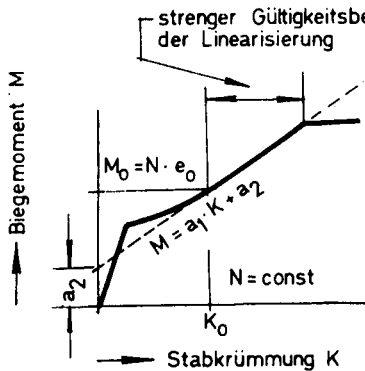


Abbildung 2 Zugbruchbereich

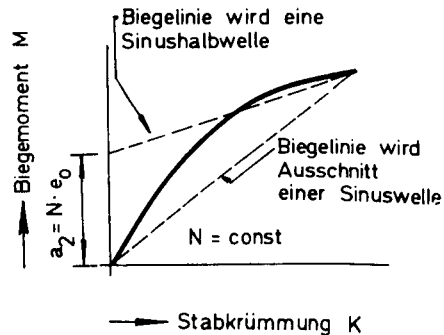


Abbildung 3 Druckbruchbereich

Charakteristischer Verlauf der Moment-Krümmungsbeziehung für Stahlbeton

Es ergibt sich entweder ein gebrochener Linienzug bei niedriger Normalkraftbeanspruchung (Abbildung 2) oder ein stark gekrümmter Verlauf bei großer Normalkraftbeanspruchung (Abbildung 3).

Für gebrochene Linienzüge läßt sich für genügend große Lastausmitten e_0 - $M_0 = N \cdot e_0 > a_2$ - mit beschränkter Gültigkeit der lineare Ansatz für den Zusammenhang zwischen Biegemoment M und Stabkrümmung K nach Gleichung (3) verwenden, womit dann eine geschlossene Lösung für das Verformungsproblem erhalten werden kann. Von dieser Möglichkeit wird in den bisherigen Arbeiten zum Traglastproblem des ausmittig belasteten Stahlbetondruckstabes kein Gebrauch gemacht. Üblich sind lediglich die folgenden zwei Vereinfachungen:

1. Die Biegelinie des verformten Stabes ist ein Ausschnitt aus einer Sinuswelle. Dieser Annahme entspricht eine Linearsierung des M - K -

Verlaufes mit $a^2 = 0$, wie dies in Abbildung 3 angedeutet ist.

2. Die Biegelinie des verformten Stabes ist eine Sinushalbwellenlinie. Dieser Annahme entspricht eine Linearisierung des M-K-Verlaufes mit $a_2 = M_0 = N \cdot e_0$.

Über die Abweichungen dieser Näherungen von der exakten Lösung werden weitere Ausführungen in Abschnitt 4.1 mitgeteilt.

3. Numerische Behandlung des ausmittig gedrückten Stabes für beliebige Elastizitätsgesetze

3.1 Allgemeines

Das Aufkommen programmgesteuerter, leistungsfähiger Rechenmaschinen war für die Lösung des Traglastproblems ausmittig gedrückter Stahlbetonstäbe sehr bedeutungsvoll, weil sie von dem Zwang befreiten, weitgehende Vereinfachungen treffen zu müssen, um das Problem noch analytisch lösen zu können. Es ist heute möglich, zu jedem vorgegebenen Spannungs-Dehnungsgesetz und für jeden beliebigen Stahlbetonquerschnitt den Moment-Krümmungszusammenhang programmgesteuert ermitteln und dann weiter auf der Grundlage eines beliebigen Moment-Krümmungszusammenhanges die Traglast eines Stahlbetonstabes zu vorgegebener, beliebiger Belastungsordnung programmgesteuert berechnen zu lassen.

In der vergangenen Zeit ist eine ganze Reihe von Programmen zur Ermittlung des Moment-Krümmungszusammenhanges und zur Traglastbestimmung veröffentlicht worden. Es sind gewisse Verschiedenheiten zwischen den einzelnen Programmen festzustellen, die zeigen, daß grundsätzlich immer mehrere Lösungsmethoden möglich sind, wobei die Leistungsfähigkeit und die Zweckmäßigkeit der Programme von der Art des Problems festgelegt sein kann, für das diese Programme verwendet werden. Im weiteren sollen die bisher bekannten hauptsächlichsten Verfahren der Programme angesprochen werden und das Wichtigste zu den Programmen des Verfassers gesagt werden, deren Verfahren sich von den bisher bekannten unterscheiden, weil sie für die spezielle Aufgabe, Traglastdiagramme zu rechnen, entwickelt wurden, nicht aber zur Berechnung der Traglast eines bestimmten Stützenfalles.

3.2 Verfahren zur Bestimmung des Moment-Krümmungszusammenhanges

Die Bestimmung der Traglast besteht aus zwei Teilaufgaben:

der eigentlichen Traglastermittlung geht im allgemeinen die Bestimmung des Moment-Krümmungs-Zusammenhanges voraus, der abgekürzt als Verformungsgesetz bezeichnet wird. In ihm verarbeitet sind die Spannungs-Dehnungslinien für Beton und Stahl - also die Elastizitätsgesetze - und die geometrische Ausbildung des Querschnitts. Die Bernoulli-Hypothese über das Ebenbleiben der Querschnitte gilt auch für das vorliegende Problem uneingeschränkt, da es sich um die Biegeverformung eines schlanken Stabes handelt.

Durch die gegenseitige Lage der Schnittebenen des verformten Stabelementes ist sein Dehnungszustand festgelegt. In der vorliegenden Arbeit werden nur in Richtung einer Querschnittshauptachse ausmittig gedrückte Stäbe behandelt, bei denen bekanntlich die Dehnungs-Nulllinie parallel zu einer Hauptachse verläuft. Zusätzlich zu dieser Bedingung, die voraussetzungsgemäß als stets erfüllt angesehen werden kann, sind zwei Angaben zur Definition der Schnittebene erforderlich, dies kann demzufolge durch Angabe der Dehnungen in zwei Punkten mit unterschiedlichem Abstand von der Dehnungs-Nulllinie erfolgen oder aber durch Angabe der Dehnung in nur einem Punkt und zusätzlicher Angabe des Schnittebenen-Gradienten senkrecht zur Dehnungs-Nulllinie. Der Gradient der Schnittebene senkrecht zur Dehnungs-Nulllinie ist identisch mit dem Maß der Krümmung K des Stabelementes, wie aus Abbildung 4 zu ersehen ist.

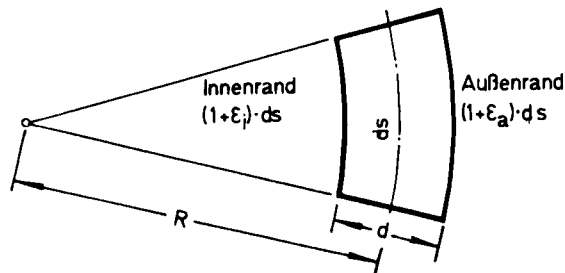


Abbildung 4 Verformtes Stabelement ds

$$(14) \quad \frac{ds}{R} = \frac{(\epsilon_a - \epsilon_i) ds}{d}$$

$$(15) \quad \frac{1}{R} = \frac{\Delta \epsilon}{d} = \frac{\partial \epsilon}{\partial e} = K$$

Die Definition des Dehnungszustandes erfolgt also durch Angabe der Dehnungen in zwei hierzu geeigneten Querschnittspunkten oder durch Angabe der Dehnung eines Querschnittspunktes und der Stabkrümmung.

Bei Verwendung nichtlinearer Elastizitätsgesetze und bei Beachtung des Aufreißens des Querschnittes nach Überschreitung der Betonbiegezugfestigkeit ist der Dehnungszustand zu einem vorgegebenen Schnittgrößenzustand (N,M) analytisch nicht mehr direkt bestimmbar. Lediglich zu vorgegebenen Dehnungszuständen kann direkt der zugehörige Schnittgrößenzustand bestimmt werden, diese Operation besteht in einer zumeist numerischen Integration der Spannungen, wie sie den einzelnen Querschnittsstellen auf Grund von Dehnungszustand und Spannungs-Dehnungsgesetz zugeordnet sind. Um also den Dehnungszustand im allgemeinen und die Stabkrümmung im besonderen zu einem Schnittgrößenzustand (N,M) zu bestimmen, sind vorab gewisse Umwege zu gehen. Üblich sind zwei Verfahren:

Das eine Verfahren zur Bestimmung des Dehnungszustandes zu vorgegebenen Schnittgrößen besteht darin, angenommene Werte, beispielsweise die Werte der Randdehnungen ϵ_i und ϵ_a , iterativ zu verbessern, so lange, bis der Dehnungszustand mit ϵ_i und ϵ_a die vorgegebenen Schnittgrößen bestätigt. Zur Beschleunigung des Iterationsprozesses werden für den Dehnungszustand ϵ_i und ϵ_a die Differenzenquotienten $\Delta N / \Delta \epsilon_i$ und $\Delta M / \Delta \epsilon_i$ sowie $\Delta N / \Delta \epsilon_a$ und $\Delta M / \Delta \epsilon_a$ bestimmt, so daß die noch vorhandenen "Fehler" dN und dM der Schnittgrößen durch die "Verbesserung" d ϵ_i und d ϵ_a der Dehnungswerte ϵ_i und ϵ_a aufgehoben werden, wofür sich folgende Gleichungen schreiben lassen:

$$(16) \quad \frac{\Delta N}{\Delta \varepsilon_i} d\varepsilon_i + \frac{\Delta N}{\Delta \varepsilon_a} d\varepsilon_a + dN = 0$$

$$(17) \quad \frac{\Delta M}{\Delta \varepsilon_i} d\varepsilon_i + \frac{\Delta M}{\Delta \varepsilon_a} d\varepsilon_a + dM = 0.$$

Das zweite Verfahren, das insbesondere angewendet wird, wenn nur die Stabkrümmung K zu einem Schnittgrößenzustand N, M gesucht wird, ist so aufgebaut, daß die Beziehung zwischen Moment, Normalkraft und Krümmung durch eine geeignete Anzahl von Wertegruppen M und K zu jeweils konstanten N wiedergegeben wird, aus der K durch Interpolation zu dem vorgegebenen Wert M bestimmt werden kann. Die einzelnen Wertegruppen M, K zu konstantem N können so gewonnen werden, daß zu vorgegebenem K der Dehnungszustand variiert wird, um durch Interpolation zwischen verschiedenen Variationszuständen oder durch Iteration das angestrebte N anzusteuern. An Stelle K vorzugeben, kann natürlich auch eine andere beliebige Größe vorgegeben werden, beispielsweise ε_i oder ε_a .

Die Vorgabe der Werte K , die im allgemeinen für äquidistante K -Werte vorgenommen wird, kann insofern Nachteile haben, als sich dadurch ausgezeichnete Punkte der M - K -Linie nicht direkt miterfassen lassen oder auch insofern, als die Unterteilung in K -Werte in gewisser Weise der Normalkraft angepaßt werden muß, wenn alle M - K -Linien durch annähernd gleich viele Wertegruppen M und K wiedergegeben werden sollen, weil der Größtwert der Krümmung sehr stark mit N veränderlich ist. Um diese Nachteile weitgehend auszuschließen, hat der Verfasser ein hierzu abgeändertes Verfahren benutzt.

Zur Berechnung von vollständigen Traglastdiagrammen, die sich punktförmig über alle Stabschlankheiten und Lastausmitten erstrecken, ist die Kenntnis der Moment-Krümmungsbeziehung im gesamten Bereich der aufnehmbaren Schnittgrößen N und M eines Querschnitts erforderlich. Es ist daher wichtig, den gesamten N - M -Bereich annähernd gleich-

mäßig dicht mit Rechenpunkten zu durchsetzen, insbesondere die Bereichsgrenzen direkt mitzuerfassen und außerdem längs einer Linie für $N=\text{const}$ ungefähr gleich viele Rechenpunkte anzuordnen. Dies kann beispielsweise so erfolgen, daß die Dehnungszustände für die einzelnen Rechenpunkte durch Vorgabe zweier charakteristischer Dehnungen beschrieben werden. Besonders geeignet hierfür sind die Dehnung des Betondruckrandes ϵ_{bD} und die Dehnung der Zugbewehrung ϵ_{eZ} .

Die rechnerische Beanspruchbarkeit eines Querschnitts wird durch die Angabe von Grenzwerten für die Dehnungen und durch Angabe von Spannungs-Dehnungsgesetzen festgelegt. Sie ist erschöpft, wenn sich der Querschnitt in einem Grenzdehnungszustand befindet, dies ist ein solcher Dehnungszustand, in dem an mindestens einer Querschnittsstelle ein Grenzwert für die Dehnung ausgenutzt ist. Als Grenzwerte für die Dehnungen werden verwendet

$\epsilon_{bD,U}^{(z)}$	Grenzwert der Betondruckdehnung bei zentrischem Druck
$\epsilon_{bD,U}^{(exz)}$	Grenzwert der Betondruckdehnung bei exzentrischem Druck
$\epsilon_{eZ,U}$	Grenzwert der Stahlzugdehnung

Aus diesen drei Werten für Grenzdehnungen lassen sich die vier markanten Grenzdehnungszustände (1) bis (4) der Abbildung 5 zusammenstellen.

Zwischen die markanten Dehnungszustände (1) bis (4) lassen sich durch lineare Interpolation beliebig viele Grenzdehnungszustände einschalten, in denen jeweils ϵ_{bD} oder ϵ_{eZ} den Grenzwert der Dehnung erreicht hat. Eine fortlaufende Interpolation entspricht einem schrittweisen Übergang von Dehnungszustand (1) auf (2) und weiter auf (3) und (4). Es lassen sich so beliebig viele Einzelpunkte der Grenzlinie ermitteln. Der charakteristische Ver-

lauf dieser Linie für die Grenzschnittgrößen N_U und M_U im Grenzdehnungszustand ist ebenfalls in Abbildung 5 dargestellt.

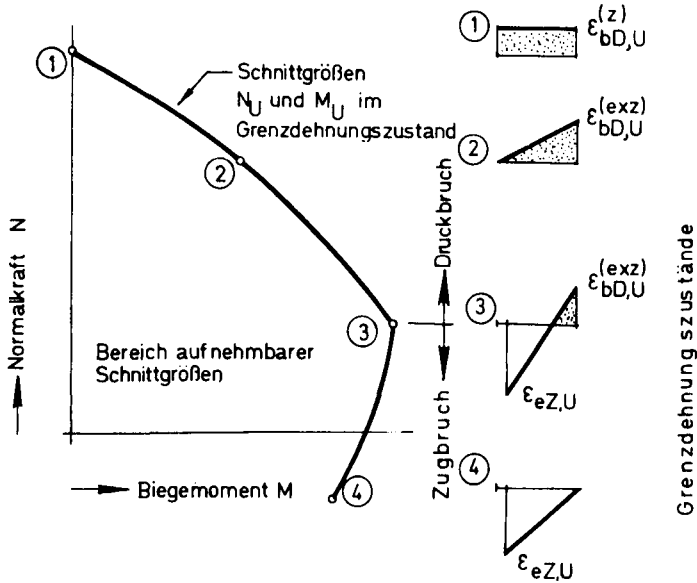


Abbildung 5 Beanspruchbarkeit eines Stahlbetonquerschnitts

Der schrittweise Übergang zwischen den markanten Dehnungszuständen kann als fortlaufender Interpolationsprozess auf einfache Weise vom Rechner programmgesteuert vollzogen werden und wird analog auch zur Durchsetzung des ganzen Bereiches aufnehmbarer Schnittgrößen mit weiteren Einzelpunkten verwendet. Hierzu ist es erforderlich, daß auch die linke Grenze ($M=0$), zu der krümmungsfreie Dehnungszustände gehören, mit markanten Dehnungszuständen (1') bis (4') bestückt wird, die den Leitdehnungszuständen (1) bis (4) zugeordnet werden. Sodann können durch schrittweisen Übergang entlang Linien zwischen (1') und (1), (2') und (2) usw. jeweils gleich viele zusätzliche Leitdehnungszustände zweiter Ordnung erzeugt werden, um dann anschließend zwischen diesen zusätzlichen Leitdeh-

nungszuständen die zu den einzelnen Rechenpunkten gehörenden Dehnungszustände einzuschalten.

Das Ergebnis dieses Rechenverfahrens, die Durchsetzung des Bereiches aufnehmbarer Schnittgrößen N und M mit einzelnen Rechenpunkten, ist für ein Beispiel in Abbildung 6 dargestellt. Durch schrittweisen Übergang in horizontaler Richtung, beispielsweise zwischen ③¹ und ③ werden die Punkte $i, i+1, i+2$ usw. auf den hervorgehobenen Linien erhalten, zwischen denen dann durch vertikalen Übergang die Punkte $j, j+1, j+2$ usw. eingeschaltet werden. Jeder Netzpunkt des dargestellten Rasters markiert einen Rechenpunkt, für den ausgehend vom Dehnungszustand die Wertegruppe N, M und K errechnet worden ist. Jede Linie $N = \text{const}$ schneidet gleich viele von oben nach unten verlaufende Linien des Rasters, und zu jedem solchen Schnittpunkt können die zugehörigen Werte M und K interpoliert werden, die insgesamt die Wertgruppen für den Moment-Krümmungszusammenhang ergeben, wobei der Wert des Grenzdehnungszustandes in jedem Falle miteingeschlossen ist. Die Unterteilung der M - K -Linie auf der K -Achse ergibt bei diesem Verfahren annähernd äquidistante Teilpunkte, was Voraussetzung für eine gute Wiedergabe einer Linie durch einzelne Punkte ist.

3.3 Verfahren zur Traglastbestimmung

Für die Berechnung der Traglast gibt es ebenfalls zwei grundsätzlich verschiedene Verfahren. Das eine kann am besten als Simulieren eines Stützenversuches beschrieben werden. Hierbei wird zu einer vorgegebenen Belastung zunächst die Gleichgewichtslage des Stabes nach Theorie II. Ordnung iterativ errechnet, der Iterationsprozess erstreckt sich auf die zunächst zu wählende Stabverformung, auf die Ermittlung der Beanspruchungsgrößen, auf die den Beanspruchungsgrößen zuzuordnenden Stabkrümmungen und auf die Berechnung der aus den Stabkrümmungen resultierenden

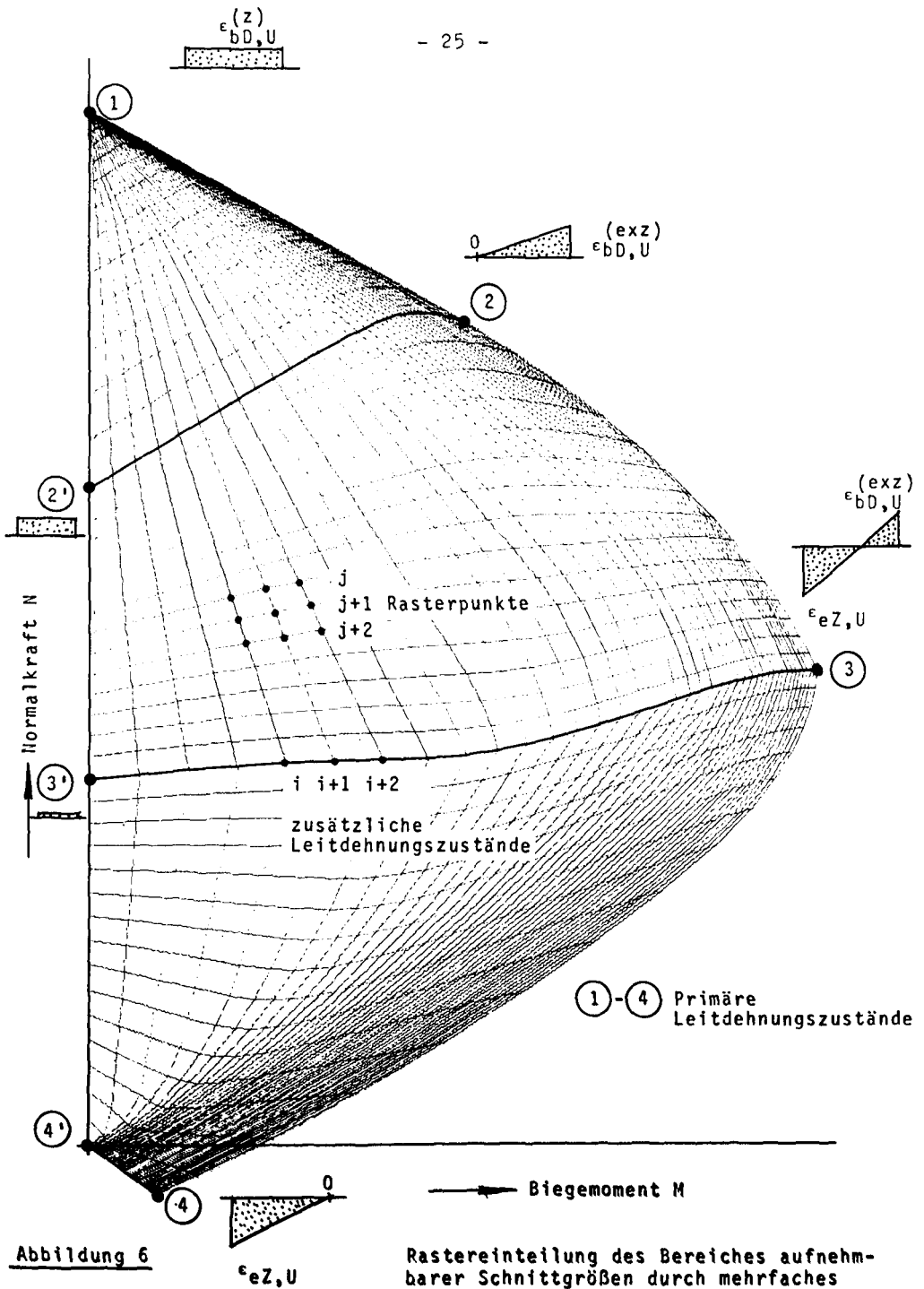


Abbildung 6

Rastereinteilung des Bereiches aufnehmbarer Schnittgrößen durch mehrfaches Straken zur Bestimmung des Moment-Krümmungszusammenhangs

Stabverformungen. Der Iterationsprozeß ist beendet, wenn die zunächst gewählte Stabverformung und die errechnete Stabverformung sich im Rahmen der angestrebten Genauigkeit entsprechen. Die Belastung kann so lange gesteigert werden, so lange sich eine stabile Gleichgewichtslage errechnen läßt, ohne daß ein Grenzdehnungszustand erreicht ist. Dieses Verfahren ist zwecksmäßig zur Traglastbestimmung einzelner Stützenfälle und zur Traglastbestimmung bei Stützen mit veränderlichem Querschnitt oder bei Stützen mit verformungsabhängigen Auflagerreaktionen, d.h. mit elastischen Einspannungen [2, 3] .

Das zweite Verfahren wird vorteilhaft zur Berechnung vollständiger Traglastdiagramme verwendet. Im wesentlichen besteht es aus der numerischen Integration der Differentialgleichung (4) für den ausmittig gedrückten Stab. An die Integration schließen sich dann weitere Prozesse an, um aus der Vielzahl möglicher Gleichgewichtszustände denjenigen zu finden, der die Traglast ergibt.

Die Moment- und Krümmungsbeziehung für $N = \text{const}$ stellt die Koppelung der drei Größen M , N und K her. Für die folgenden Überlegungen ist es von Vorteil, an Stelle M die Lastexzentrizität $e = M/N$ (Abbildung 1) zu verwenden, so daß die Koppelung der drei Größen e , N und K durch die Moment Krümmungsbeziehung angegeben sein soll. Der Gleichgewichtszustand des ausmittig gedrückten Stabes nach Abbildung 1 mit einem bestimmten Querschnitt ist eindeutig definiert durch die Größen N , s , e_0 , e_s , die eindeutig $e(x)$ ergeben.

Durch die Koppelung zwischen $e(x)$, N und $K(x)$ genügt es, an Stelle des gesamten Verformungsverlaufes $e(x)$ nur den Maximalwert e_m zur Kennzeichnung des Verformungsverlaufes anzugeben. Den Werten N , s , e_0 und e_s ist demnach eindeutig der Wert e_m zugeordnet. Bei Vorgabe von 4 der 5 Werte N , s , e_0 , e_s und e_m läßt sich demnach stets der fünfte nicht vorgegebene Wert errechnen.

Allgemein läßt sich sagen, daß die Traglastbestimmung ein

spezielles Problem der allgemeineren Aufgabe der Bestimmung des Verformungszustandes ist, es ist derjenige Verformungszustand speziell zu berechnen, dessen zugehörige Belastung auf Grund einschränkender Anforderungen als Traglast bezeichnet wird. In dem zuerst beschriebenen Verfahren wurde die Traglast so gefunden, daß zunächst die Last variiert wurde und dann die Traglast als Extremwert der Lasten aller stabilen Gleichgewichtszustände ohne Überschreitung vorgegebener Grenzwerte für die Dehnungen bestimmt wurde. Die Last wurde also zunächst frei variiert und dann optimiert.

Das gleiche Optimierungsprinzip ist auch bei dem hier besprochenen Verfahren anzuwenden: Einer der vier vorgegebenen Werte wird variiert und der errechnete fünfte Wert wird optimiert, so daß die zugehörige Last die Bedingung der Traglast erfüllt.

Die Größen N und e_m sind durch den Moment-Krümmungszusammenhang aneinander gekoppelt, es ist deshalb nicht zweckmäßig, eine dieser beiden Größen als zu bestimmende Größe einzusetzen, hierfür verbleiben s , e_o und e_s . Zweckmäßigerweise vorgegeben werden Größen, die bei dem Variationsproblem konstant gehalten werden können, also N , s , e_o und e_s . Variiert wird zweckmäßigerweise die am wenigsten interessierende Größe, das ist in diesem Falle e_m . Durch Einteilung der 5 Werte N , s , e_o , e_s und e_m in die Klassen:

- a) vorgegebene und konstant gehaltene Werte,
- b) zu variierender Wert und
- c) zu berechnender und zu optimierender Wert

lassen sich systematisch die Möglichkeiten des Variationsproblems mit anzuschließender Optimierung angeben.

Klasseneinteilung der Werte N , s , e_o , e_s , e_m	
vorgegeben und konstant	N , s , e_o , e_s
zu variieren	e_m
zu berechnen und zu optimieren	s , e_o , e_s

Faßt man zur Aufzählung der Lösungsmöglichkeiten die Werte e_o und e_s zu einer charakteristischen Größe e_e zusammen, wie es beispielsweise auch bei gleich großen Endexzentrizitäten $e_o=e_s=e_e$ angebracht wäre, so ergeben sich zwei Lösungswege:

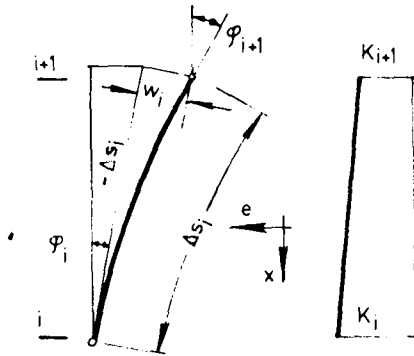
Lösungswege zur Behandlung von N, s, e_e, e_m		
Lösungsweg	1	2
vorgegeben und konstant	N, e_e	N, s
zu variieren	e_m	e_m
zu berechnen und zu optimieren	s	e_e

Lösungsweg 1 wird in [1,4] beschrieben, Lösungsweg 2 in [5].

Die numerische Integration der Differentialgleichung (4) nach Lösungsweg 2 in [5] wird mit Hilfe des Differenzenverfahrens durchgeführt. Zu vorgegebenen und konstant gehaltenen Werten N und s und vorgegebenem aber zu variierendem e_m wird die Biegelinie errechnet und ein jeweils anderer Wert e_e erhalten. Der vorgegebene Wert N ist Traglast zum Extremwert von e_e . Die Berechnung der Biegelinie nach diesem Verfahren ist auf direktem Wege ohne Iteration möglich.

In [1] wird s und damit die Biegelinie für den Lösungsweg 1 iterativ bestimmt. Der Verfasser benutzt ebenfalls Lösungsweg 1, verwendet aber zur Berechnung von s ein direktes Verfahren, dessen grundsätzliche Methode in [6] beschrieben wird, neu ist die Anwendung dieser Methode zur numerischen Integration von Gleichung (4).

Bei abschnittsweise linear veränderlichem Krümmungsverlauf $K(x)$ im Stababschnitt Δs_i läßt sich die Ordinate e_{i+1} und der Stabneigungswinkel φ_{i+1} des Punktes $i+1$ aus e_i und φ_i berechnen:



$$(18) \quad w_i = \frac{\Delta s_i^2}{6} (2 K_i + K_{i+1})$$

$$(19) \quad e_{i+1} = e_i - (\Delta s_i) \sin \varphi_i - w_i \cos \varphi_i$$

$$(20) \quad \varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\Delta s_i}{2} (K_i + K_{i+1})$$

Gleichungen (18) und (19) lassen sich nach Δs_i auflösen.

$$e_{i+1} = e_i - \Delta s_i \sin \varphi_i - \frac{\Delta s_i^2}{6} (2 K_i + K_{i+1}) \cos \varphi_i$$

$$(21) \quad \Delta s_i = \frac{-3 \sin \varphi_i + \sqrt{9 \sin^2 \varphi_i - 6(e_{i+1} - e_i)(2 K_i + K_{i+1}) \cos \varphi_i}}{(2 K_i + K_{i+1}) \cos \varphi_i}$$

Gleichung (21) dient in der angegebenen Form zur numerischen Integration von Gleichung (4). Beginnend an der Stelle mit e_m - hier sind e , φ und K bekannt - wird die Integration von e_m bis zu einem unteren Wert für e beispielsweise $e = e_0$ durchgeführt, indem zu jedem Integrationsabschnitt (e_{i+1} bis e_i) der Stablängenabschnitt Δs_i und der neue Stabneigungswinkel φ_{i+1} errechnet werden. Typisch ist also, daß die Integration nicht über die Stablänge, sondern über die Verformungsordinate läuft.

Für die Form der ausgebogenen Stabachse in Abbildung 1 würde die Integration beispielsweise zunächst für e_m bis e_0 durchzuführen sein, die zugehörige Stablänge ist doppelt zu nehmen, weil sie sowohl ober- als auch unterhalb des Stabquerschnittes mit e_m auftritt. Anschließend ist die Integration für $e = e_0$ bis $e = e_s$ durchzuführen und danach für $e = e_s$ bis $e = 0$, wobei der zugehörige Stab-

längenabschnitt wieder doppelt zu nehmen ist, weil zu den Abschnitten $e=e_g$ bis $e=e_o$ und $e=0$ bis $e=-e_g$ gleiche Längen gehören. Es ist nach der geschilderten Methode möglich, Stäbe mit ungleichen Endexzentrizitäten zu behandeln, das Verfahren ist keineswegs auf den einfachen Fall gleicher Endexzentrizitäten beschränkt.

Zur Berechnung vollständiger Traglastdiagramme kann vorteilhaft von folgender Möglichkeit Gebrauch gemacht werden: Die für die Integration vorgegebenen und konstant gehaltenen verschiedenen planmäßigen Lastausmitten e_e sind oft Vielfache des kleinsten Wertes. Beispielsweise werden die Traglasten für die Lastausmitten $e_e = 0,10-0,20-0,30-0,40-0,50-1,00-1,50$ berechnet. Wird nun der einzelne Integrationsabschnitt (e_{i+1} bis e_i) in seiner Größe so gewählt, daß ein ganzes Vielfaches von ihm obige Werte für e_e ergibt, so kann die Stablänge s zu einem Wert e_m in einem einzigen Integrationszyklus gleich für alle Werte der Lastausmitten e_e bestimmt werden, e nimmt während der Integration kontinuierlich ab und erreicht zu bestimmten Integrationszuständen der Reihe nach alle vorgegebenen Werte e_e in abnehmender Folge.

In dieser Verschachtelung scheint der Grund für eine weitgehende Rationalisierung des Rechenverfahrens zu liegen, wie durch einen Vergleich der Rechenzeiten zwischen den Programmen nach [1] und dem eigenen Programm des Verfassers zu ersehen ist. Die angegebenen Zeiten beziehen sich auf die gleiche Rechanlage, nämlich auf die IBM 7094 des Deutschen Rechenzentrums in Darmstadt.

Der Rechenzeitbedarf des eigenen Programms für ein Traglastdiagramm, das die kritischen Längen s zu 20 verschiedenen Werten N und für 9 Lastausmitten e_e enthält (insgesamt ergibt dies ca. 100 Stützstellen), beträgt einschließlich der Ermittlung der Moment-Krümmungsbeziehungen je nach Querschnittsform 2,5 - 2,9 Minuten.

Mit den in [1] mitgeteilten Angaben betrüge die Rechenzeit $20 \cdot 0,1 = 2,0$ Minuten für die Ermittlung der Moment-Krümmungsbeziehung zuzüglich 3 - 12 Minuten je nach Stützstellenzahl für die Bestimmung der Traglasten.

In [1] und [4] wird darauf hingewiesen, daß gewisse rechen-technische Schwierigkeiten bei der numerischen Integration dann auftreten, wenn die Moment-Krümmungsbeziehung starke Unstetigkeiten zeigt. Dies kann sich beispielsweise für eine geringe Normalkraftbeanspruchung ergeben, wenn Betonzugspannungen bei schwach bewehrten Querschnitten bis zu einer begrenzten Größe mitgerechnet werden.

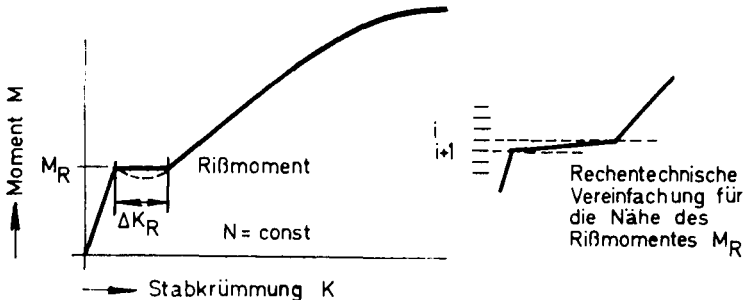


Abbildung 7 Moment-Krümmungsbeziehung bei Mitrechnung von Betonzugspannungen

Auf Grund der Rechenverfahren ergibt die Steuerung für zunehmende K im Bereich des Rißmomentes M_R den in Abbildung 7 gestrichelt dargestellten funktionalen Zusammenhang zwischen M und K . Dieser Verlauf kann jedoch nicht der Beziehung zwischen M und K entsprechen, wie er sich im wirklichen belasteten Stab einstellt. Wenn hier infolge einer Laststeigerung immer mehr Querschnittsstellen aufreißen, bedingt das Übersteigen des Rißmomentes M_R an diesen Stellen eine plötzliche Vergrößerung der Krümmung um das Maß ΔK_R , was als plötzliche Rißbildung wahrgenommen wird. Bekanntlich öffnen sich die Risse bei schwach bewehrten Querschnitten - solche werden hier diskutiert -

sofort in nennenswerter Größe. Es ist deshalb angebracht, statt des gestrichelten Funktionsverlaufes den durchgezogenen für die Berechnung der Traglast zu nehmen, er entspricht dem tatsächlichen Verhalten bei Laststeigerung. Zur Wiedergabe des Verhaltens bei Entlastung müßte der Ausgleich in Höhe des relativen Minimums durchgeführt werden.

In den Rechenprogrammen des Verfassers läuft die Integration über e , was einer Integration über M gleichkommt. Bei hinreichend feiner Unterteilung der Gesamtstrecke M ($M = M_m$ bis $M = 0$) in 100 bis 200 Abschnitte kann der horizontal verlaufende Bereich in der Nähe des Biegemomentes M_R durch einen hinreichend flach verlaufenden Bereich zwischen zwei Teilintegrationsgrenzen i und $i+1$ ersetzt werden, so daß jede Unstetigkeit behoben ist und keine zusätzlichen rechentechnischen Aufwendungen, wie in [1] und [4] angedeutet, erforderlich sind.

3.4 Angaben über die Genauigkeit numerischer Verfahren

Zum Abschluß des Abschnittes über die numerische Behandlung des ausmittig gedrückten Stabes mit den Rechenprogrammen des Verfassers sollen noch einige Angaben über die erzielbare Genauigkeit gemacht werden. Hierzu wurde ein reiner Stahlquerschnitt mit den Programmen behandelt. Die Lösungen der Elastizitätstheorie, ausgedrückt als kritische Längen s , werden als exakte Werte aufgefaßt und mit den durch numerische Integration gewonnenen Werte s_n verglichen.

Auf Grund einer Bestimmung der kritischen Länge s und s_n für drei verschiedene Normalkräfte N und mehrere Lastexzentrizitäten e konnten die grafischen Darstellungen der Abbildung 8 hergestellt werden, aus der sich der Einfluß der Integrationsschrittweite Δe auf die Genauigkeit des Wertes s_n ablesen läßt. Eine Unterteilung des gesamten

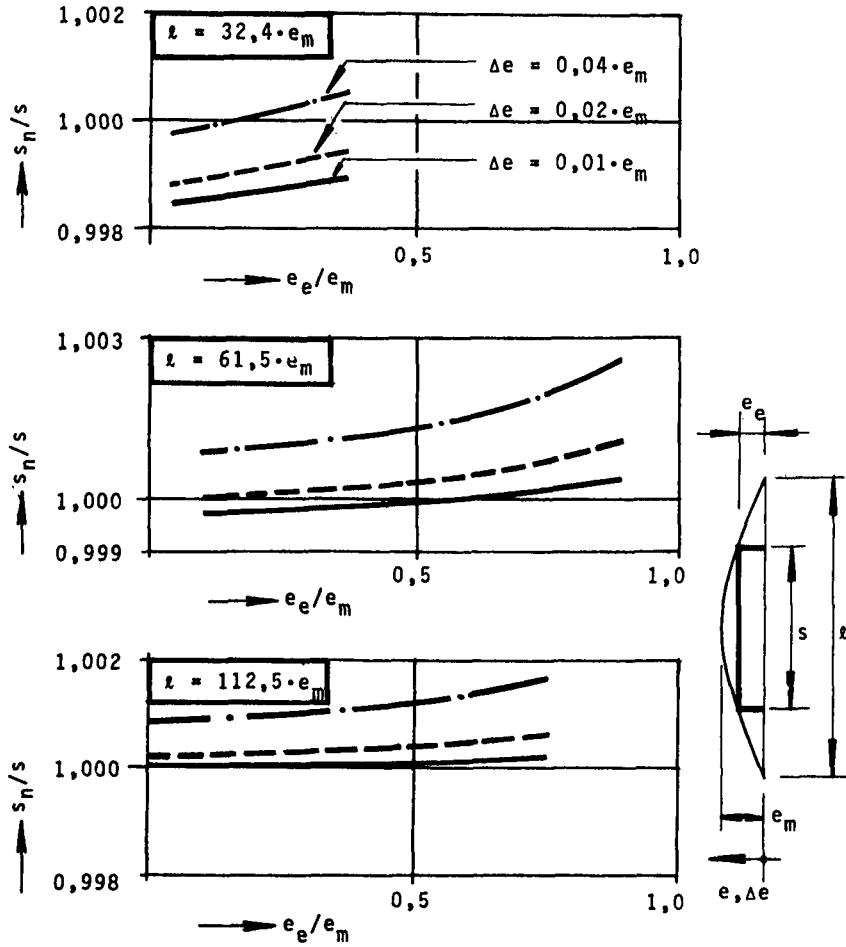


Abbildung 8

Verhältnis aus dem durch numerische Integration erhaltenen Wert s_n und dem exakten Wert s für unterschiedliche Schrittweiten Δe der Integration

Integrationsbereiches in 25 bis 100 Einzelabschnitte ergibt danach Werte, die weniger als 0,2 % vom sogenannten exakten Wert s abweichen.

Bei Diskussion der Genauigkeit soll an dieser Stelle auch eine kritische Anmerkung über die Rechengrundlagen gemacht werden. Bereits in [1] wird anschaulich gezeigt, daß es nicht möglich ist, die Verformung von Stahlbeton mit einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz wirklich befriedigend errechnen zu können. Hierzu wäre ein umfassenderes Verformungsgesetz Voraussetzung, das den Beton nicht nur als nichtlineares, aber rein elastisches Material auffaßt, es müßte zumindest die beiden wichtigsten zusätzlichen Parameter "Zeit" und "Belastungsablauf" miteinfassen. So lange ein solches Gesetz nicht formuliert ist, muß es fraglich sein, lediglich durch gesteigerte Genauigkeit bei der Rechentechnik die Traglast ausmittig gedrückter Stahlbetonstützen zutreffender errechnen zu wollen. Es ist daher ein besonderes Anliegen dieser Arbeit, einzelne Prozesse in diesem Licht zu betrachten, um aufzuzeigen, welche Vereinfachungen statthaft sind, um dennoch das Traglastproblem im Rahmen der durch die Kenntnis der Grundlagen festgelegten Genauigkeit zu lösen. Insofern gerät an dieser Stelle ein gewisser ingenieurmäßiger Aspekt in die Art der Behandlung des Traglastproblems, zu dem sich der Verfasser ausdrücklich bekennen möchte, da es ihm schwer fällt, wissenschaftlichen Mehraufwand ohne die gleichzeitige Frage nach dem praktischen Mehr-Nutzen zu üben.

4. Der frei drehbare, unverschieblich gelagerte Stab mit gleich großen Lastausmitten an den Stabenden

4.1 Vereinfachung der Verformungsberechnung für nichtlineare Moment-Krümmungszusammenhänge des Stahlbetons

Der Hauptanteil des Gesamtaufwandes bei Lösung des Traglastproblems liegt in der Integration der Differentialgleichung und der Variation der oberen Integrationsgrenze zur Optimierung der errechneten Freigröße, wie es in Abschnitt 3.3 beschrieben wurde. Die dort ebenfalls berichteten Vereinfachungen betrafen nur die Rechentechnik, noch nicht aber das eigentliche Problem.

Im folgenden Abschnitt soll das eigentliche Problem auf eine Vereinfachungsmöglichkeit hinsichtlich der Integration der im allgemeinen nichtlinearen Moment-Krümmungsbeziehung untersucht werden. Im Abschnitt 2.2 waren bereits die bei rein analytischer Behandlung üblichen Vereinfachungen erwähnt, wonach die Biegeverformung des ausmittig gedrückten Stabes als volle Sinuswelle oder als Teil einer solchen angenommen wird. Beiden Vereinfachungen entsprechen Linearisierungen des Moment-Krümmungsverlaufes, wie Abbildung 3 angedeutet ist.

Zur Erzielung größerer Klarheit wird den nachfolgenden Überlegungen das leichter zu beschreibende Modell des ausmittig gedrückten Stabes mit gleichen Endexzentrizitäten zugeordnet, unbeschadet dieser Einschränkung gelten die gemachten Ausführungen und Ergebnisse in analoger Form auch für den allgemeinen Fall nach Abbildung 1.

Die Annahme, daß die Biegelinie des verformten Stabes einer vollen Sinuswelle entspricht, ergibt Gleichung (22) zur Berechnung der Maximal-Lastausmitte e_m in Stabmitte.

$$(22) \quad e_m = \frac{s^2}{\pi^2} \cdot K_m + e_e$$

Bei Annahme eines Ausschnitts aus der vollen Sinuswelle für die Biegelinie des verformten Stabes nach Abbildung 9 läßt sich folgende Gleichung anschreiben:

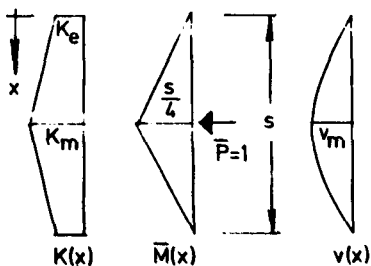
$$(23) \quad \frac{\arcsin \frac{e_e}{e_m}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{e_m}{K_m}} - \frac{s}{2}}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{e_m}{K_m}}}$$

$$(24) \quad 2 \arcsin \frac{e_e}{e_m} = \pi - \frac{s}{\sqrt{\frac{e_m}{K_m}}}$$

Hieraus kann eine Gleichung zur iterativen Bestimmung von e_m durch Umformung angegeben werden:

$$(25) \quad e_m = \frac{s^2 \cdot K_m}{(\pi - 2 \arcsin \frac{e_e}{e_m})^2}$$

Diese beiden Vereinfachungen bestehen in Annahmen über die Form der Biegelinie des verformten Stabes oder, was hiermitgleichbedeutend ist, in Annahmen über den Verlauf der Moment-Krümmungsbeziehung, in beiden Fällen Linearisierungen. Im Gegensatz hierzu sollen zwei andere Vereinfachungen diskutiert werden, die in Annahmen über den Verlauf der Stabkrümmungen über die Länge des Stabes bestehen.



Bei Annahme eines linearen Verlaufes der Krümmung zwischen dem Maximalwert K_m und dem Wert K_e am Stabende ergibt sich die Durchbiegung v_m des Stabes bekanntlich durch Integration des Produktes aus Moment $M(x)$ und der Stabkrümmung $K(x)$.

$$(26) \quad v_m = \int_0^s \bar{M}(x) \cdot K(x) \cdot dx$$

$$(27) \quad = s \left[\frac{1}{8} K_e \cdot s + \frac{1}{12} s (K_m - K_e) \right]$$

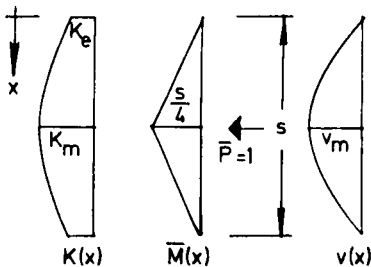
$$(28) \quad v_m = \frac{s^2}{24} (2 K_m + K_e)$$

Gleichung (28) wurde mit dem Nenner 25 bereits in einer früheren Veröffentlichung des Verfassers als Näherungsansatz verwendet [7] .

Die Maximal-lastausmitte e_m ergibt sich dann für diesen Fall der Vereinfachung zu:

$$(29) \quad e_m = \frac{s^2}{24} (2 K_m + K_e) + e_e.$$

Auf Aas-Jakobsen geht die Vereinfachung zurück, die den Verlauf der Stabkrümmung als Parabel zweiter Ordnung annimmt [8] .



$$v_m = \int_0^s \bar{M}(x) \cdot K(x) \cdot dx$$

$$(30) = s \left[\frac{1}{8} K_e \cdot s + \frac{5}{48} s (K_m - K_e) \right]$$

$$(31) = \frac{s^2}{48} (5 K_m + K_e)$$

Für Gleichung (31) wird die vereinfachte, näherungsweise Form (32) gesetzt, die ebenfalls bereits von Aas-Jakobsen verwendet worden ist.

$$(32) \quad v_m = \frac{s^2}{10} \left(K_m + \frac{1}{4} K_e \right)$$

$$(33) \quad e_m = \frac{s^2}{10} \left(K_m + \frac{1}{4} K_e \right) + e_e$$

Als analytische Gleichung geschrieben ist der Verlauf der Durchbiegungen $v(x)$ bekanntlich jeweils zwei Ordnungen höher als der Verlauf der Krümmungen $K(x)$. Der Verlauf des Gesamtmomentes $ges\ M$ entspricht hinsichtlich des Grades seiner Ordnung dem Verlauf der Durchbiegung $v(x)$.

$$(34) \quad ges\ M(x) = N \cdot [e_e + v(x)]$$

Daraus ergibt sich, daß der Annahme lineareren Krümmungsverlaufes eine Funktion dritten Grades für den Moment-Krümmungsverlauf zugeordnet ist. Zu der Annahme parabelförmigen Krümmungsverlaufs gehört jedoch nur eine Funktion zweiten Grades für den Zusammenhang zwischen Moment und Krümmung.

Um eine Aussage über die Auswirkungen der vier verschiedenen Vereinfachungen machen zu können, sind mit den in Abschnitt 3.3 beschriebenen Traglastprogrammen des Verfassers die Traglasten für ausmittig gedrückte Stahlbetonstützen mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt berechnet worden. Gleichzeitig wurden auch die jeweils im Traglastzustand auftretenden Maximalwerte der Verformungen v_m nach Gleichung (35) bestimmt sowie die Näherungswerte $v_m(N)$ aus den Werten K_m und K_e entsprechend den Angaben in Abbildung 9 für die vier verschiedenen Vereinfachungen errechnet.

$$(35) \quad v_m = e_m - e_e$$

Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 10 bis 17 dargestellt, für zwei Stahlgüten, BSt 24/34 und BSt 42/50, sind für jeweils vier verschiedene mechanische Bewehrungshalte $\omega = Fe \cdot B_s / (b \cdot d \cdot B_R)$ die Quotienten $v_m(N)/v_m$ in Abhängigkeit der bezogenen Stablänge s/d und der bezogenen Lastausmitte e_e/d dargestellt.

Für die Annahme, daß die Biegelinie ein voller Sinusbogen ist, ergibt sich hiernach der näherungsweise für den Trag-

lastzustand errechnete Wert für die Mittendurchbiegung $v_m(N)$ zu klein, und zwar beträgt der Fehler bis zu über -16 ‰ . Bei Annahme eines Sinusausschnittes für die Biegelinie ist der Näherungswert $v_m(N)$ stets zu groß und erreicht maximal einen Fehler von mehr als $+12\text{ ‰}$. Für die Annahmen linearen und parabelförmigen Krümmungsverlaufes betragen die größten Fehler -14 und $+6\text{ ‰}$. Der Verlauf des Quotienten $v_m(N)/v_m$ ist im wesentlichen für beide untersuchten Stahlgüten und alle vier untersuchten Bewehrungsgehalte gleich.

Ein gewisser Vorrang ist den Vereinfachungen 3 und 4 gegenüber 1 und 2 einzuräumen, obwohl ihre praktische Anwendbarkeit dadurch umständlicher wird, daß nicht nur der Maximalwert der Krümmung K_m bekannt sein muß, sondern zusätzlich auch der Wert K_e am Stabende. Insbesondere aber für den baupraktisch als am wichtigsten zu erachtenden Schlankheitsbereich zwischen $s/d = 0$ und $s/d = 30$ ergeben sie die geringsten Abweichungen mit maximal ungefähr -10 ‰ und $+6\text{ ‰}$ gegenüber -16 ‰ und $+12\text{ ‰}$ bei den Vereinfachungen 1 und 2.

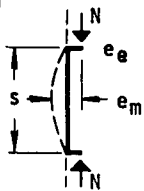
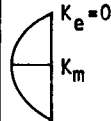
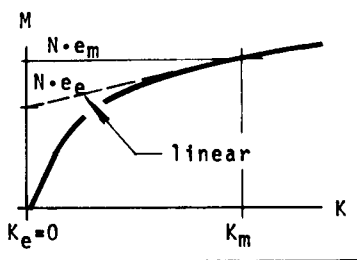
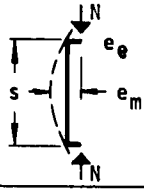
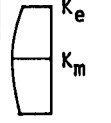
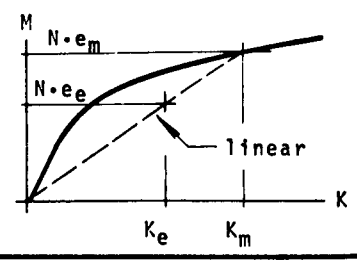
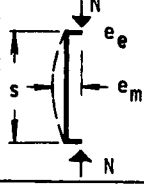
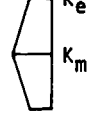
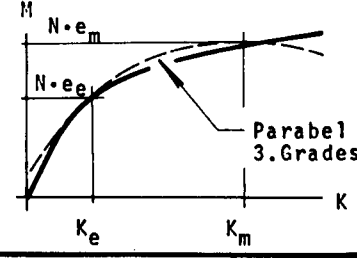
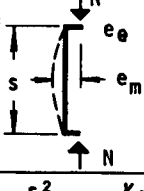
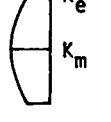
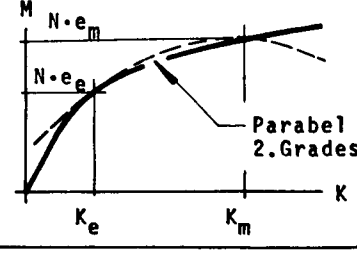
	Biegelinie	Stabkrümmung	Verformungsgesetz
1			
	$e_m = \frac{s^2}{\pi^2} K_m + e_e$		
2			
	$e_m = \frac{s^2 \cdot K_m}{[\pi - 2 \cdot \arcsin(e_e/e_m)]^2}$		
3			
	$e_m = \frac{s^2}{24} (2K_m + K_e) + e_e$		
4			
	$e_m = \frac{s^2}{10} (K_m + \frac{K_e}{4}) + e_e$		

Abbildung 9 Zusammenstellung verschiedener Annahmen zur Vereinfachung der Integration der Differentialgleichung des ausmittig gedrückten Stahlbetonstabes

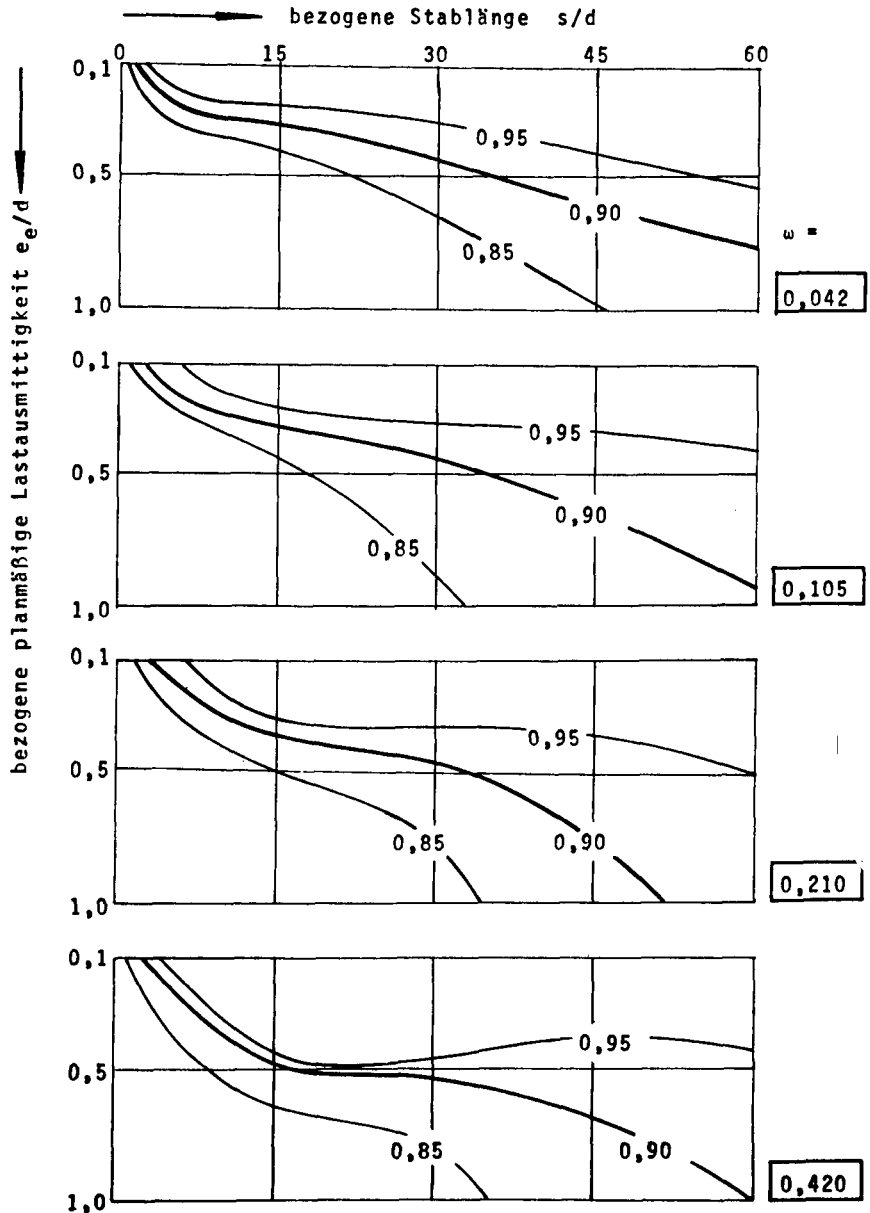


Abbildung 10

Verlauf der Linien mit gleichem Quotienten $v(N)/v$
 v = exakter Wert der Durchbiegung im Traglastzustand
 $v(N)$ = Durchbiegung aufgrund der Vereinfachung 1,
 voller Sinusbogen für Biegelinie und Krümmungs-
 verlauf

Stahlfestigkeit: $\sigma_s = 24\ 000\ \text{Mp/m}^2$

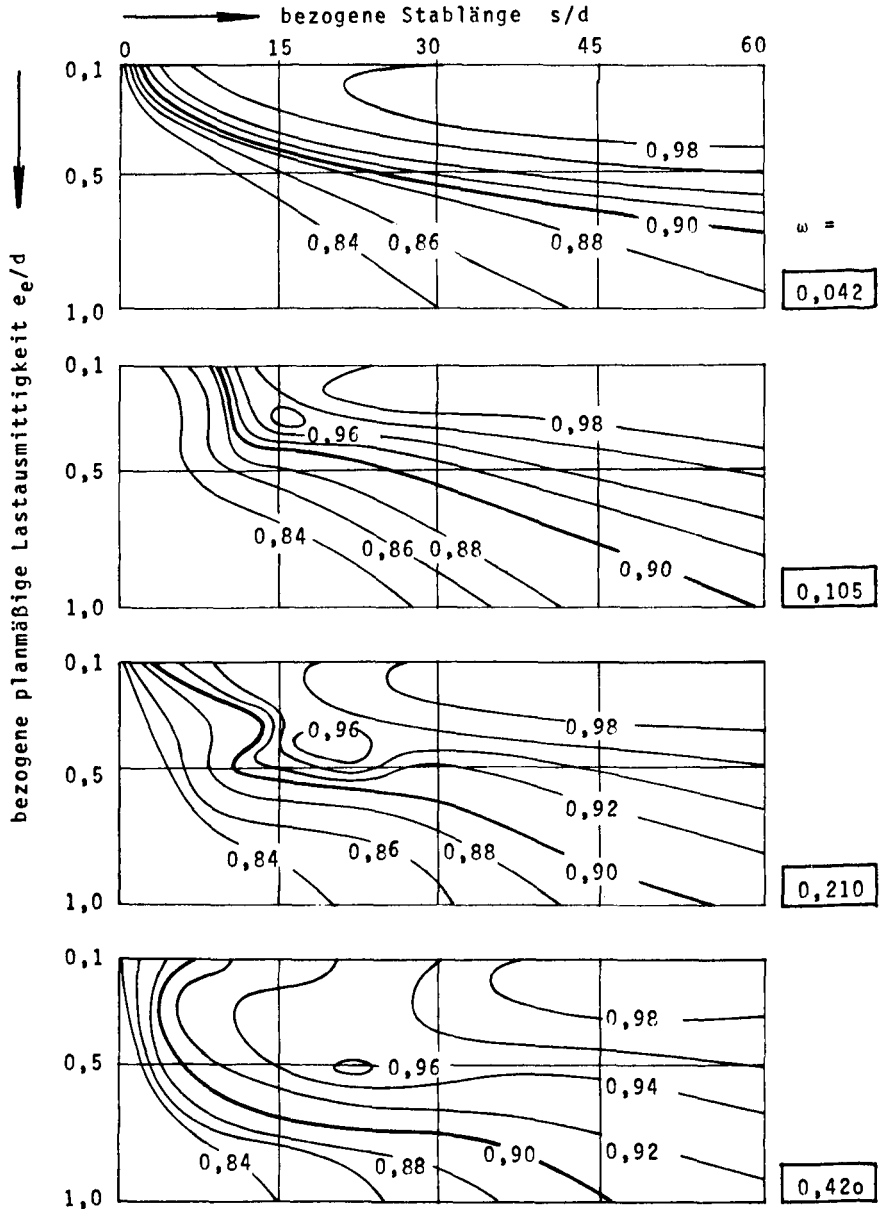


Abbildung 11 Verlauf der Linien mit gleichem Quotienten $v(N)/v$

v = exakter Wert der Durchbiegung im Traglastzustand
 $v(N)$ = Durchbiegung aufgrund der Vereinfachung 1,
 voller Sinusbogen für Biegelinie und Krümmungs-
 verlauf

Stahlfestigkeit: $R_s = 42\,000 \text{ MPa}$

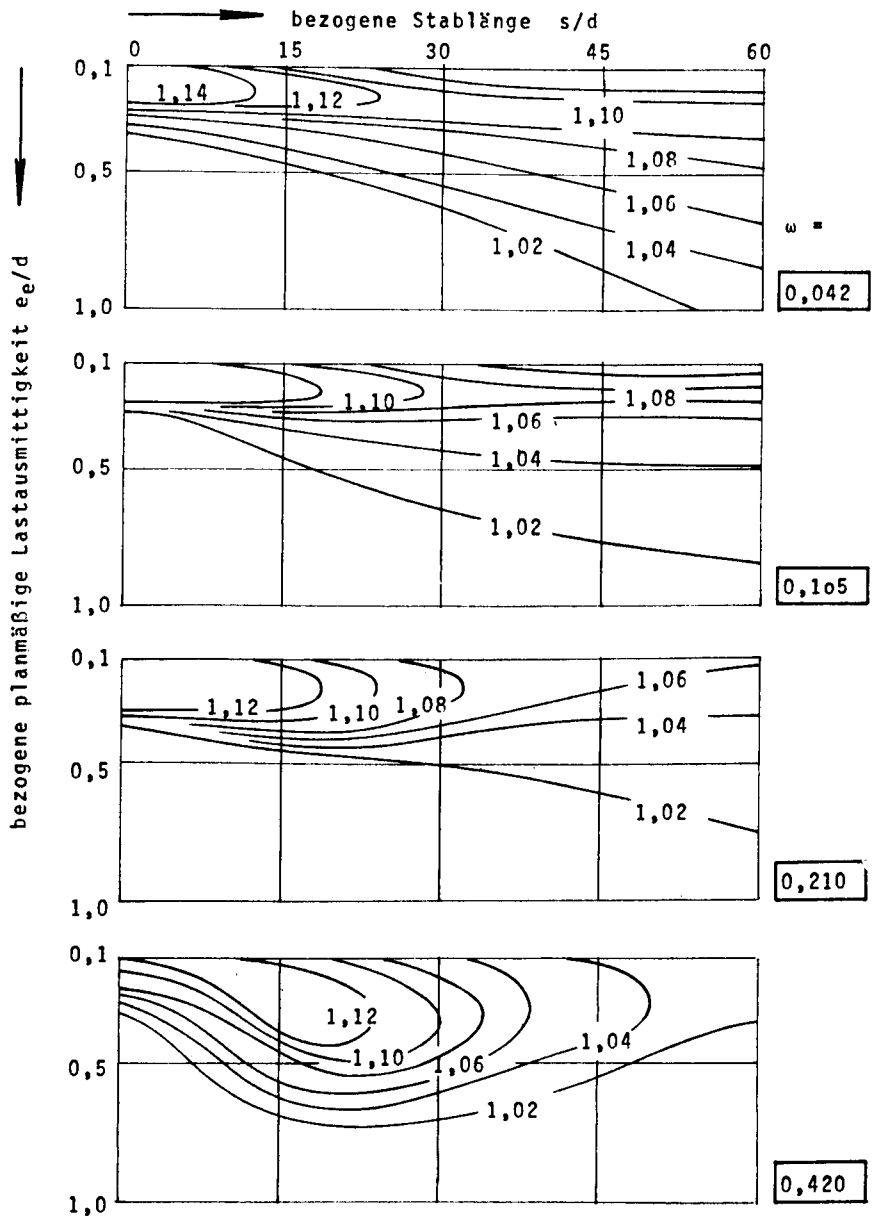


Abbildung 12 Verlauf der Linien mit gleichem Quotienten $v(N)/v$

v = exakter Wert der Durchbiegung im Traglastzustand
 $v(N)$ = Durchbiegung aufgrund der Vereinfachung 2,
 Ausschnitt eines Sinusbogens für Biegelinie
 und Krümmungsverlauf

Stahlfestigkeit: $\sigma_s = 24\,000 \text{ Mp/m}^2$

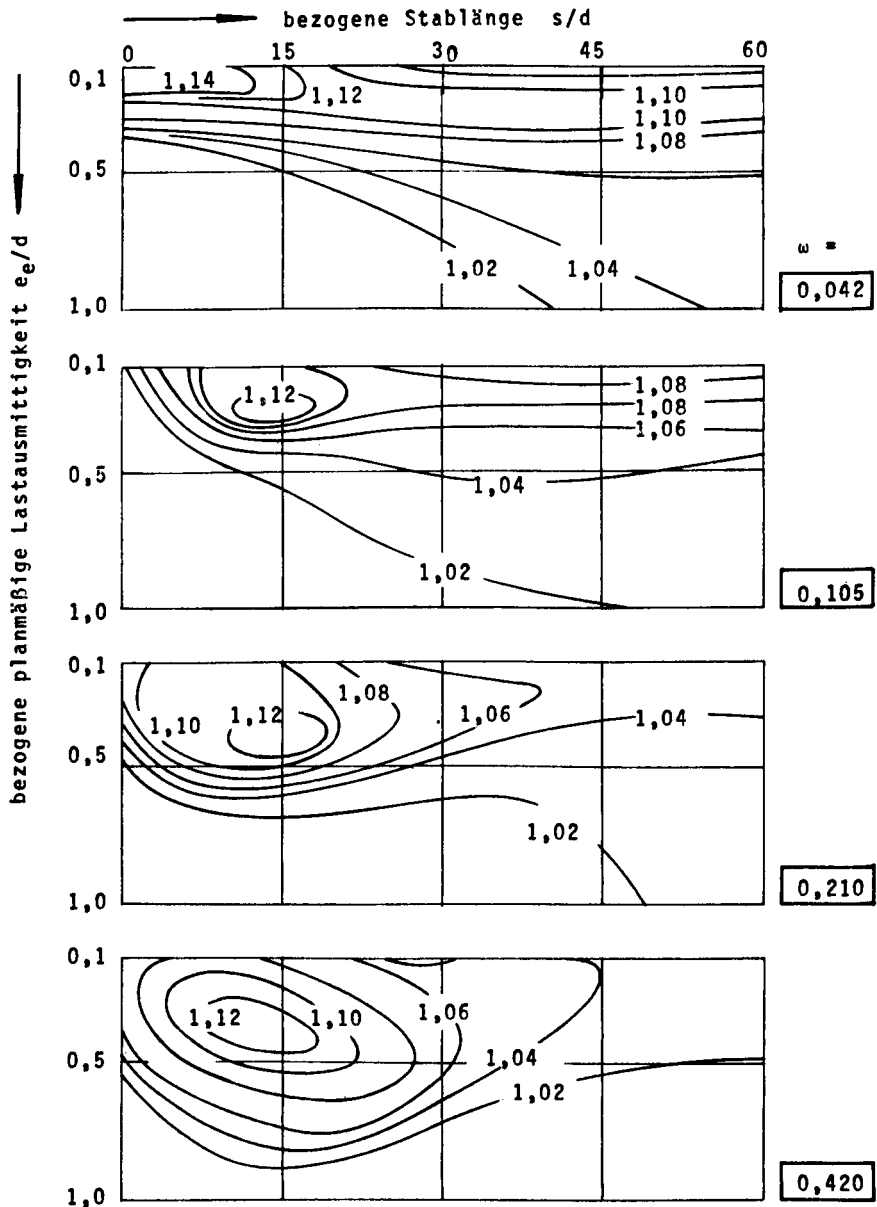


Abbildung 13

Verlauf der Linien mit gleichem Quotienten $v(N)/v$

v = exakter Wert der Durchbiegung im Traglastzustand
 $v(N)$ = Durchbiegung aufgrund der Vereinfachung 2,
 Ausschnitt eines Sinusbogens für Biegelinie
 und Krümmungsverlauf

Stahlfestigkeit: $\beta_s = 42\,000 \text{ Mp/m}^2$

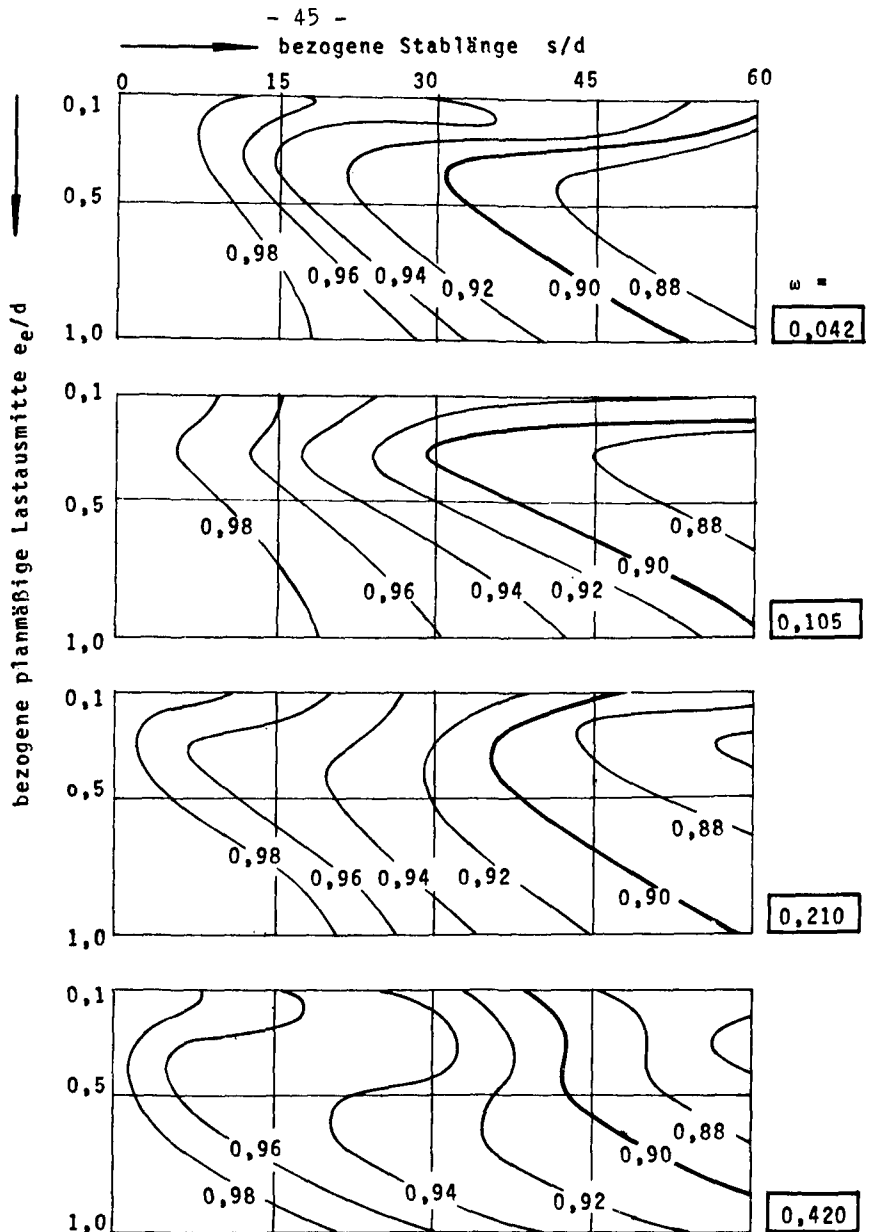


Abbildung 14 Verlauf der Linien mit gleichem Quotienten $v(N)/v$

v = exakter Wert der Durchbiegung im Traglastzustand
 $v(N)$ = Durchbiegung aufgrund der Vereinfachung 3,
 linearer Krümmungsverlauf

Stahlfestigkeit: $\beta_s = 24\,000 \text{ Mp/m}^2$

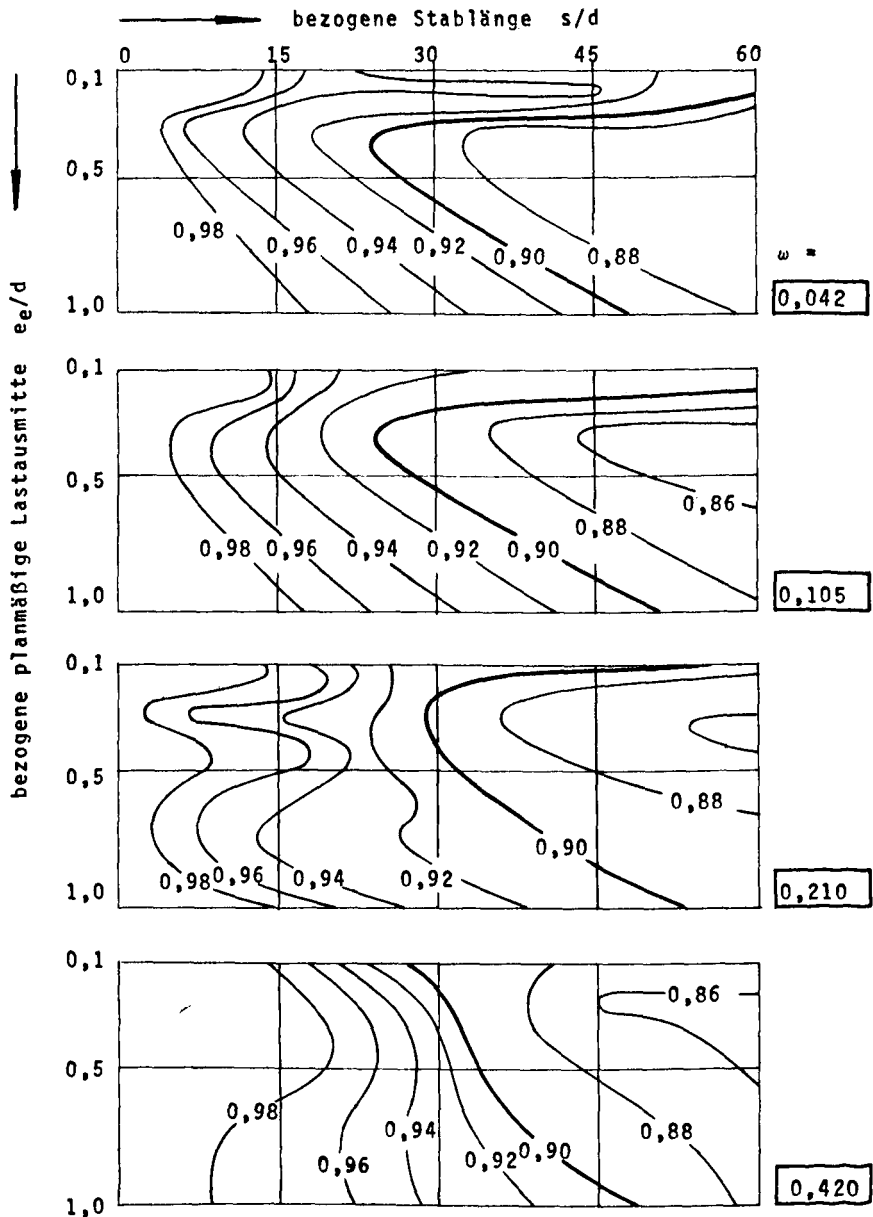


Abbildung 15

Verlauf der Linien mit gleichem Quotienten $v(N)/v$

v = exakter Wert der Durchbiegung im Traglastzustand
 $v(N)$ = Durchbiegung aufgrund der Vereinfachung 3,
 linearer Krümmungsverlauf

Stahlfestigkeit: $\beta_s = 42\,000 \text{ Mp/m}^2$

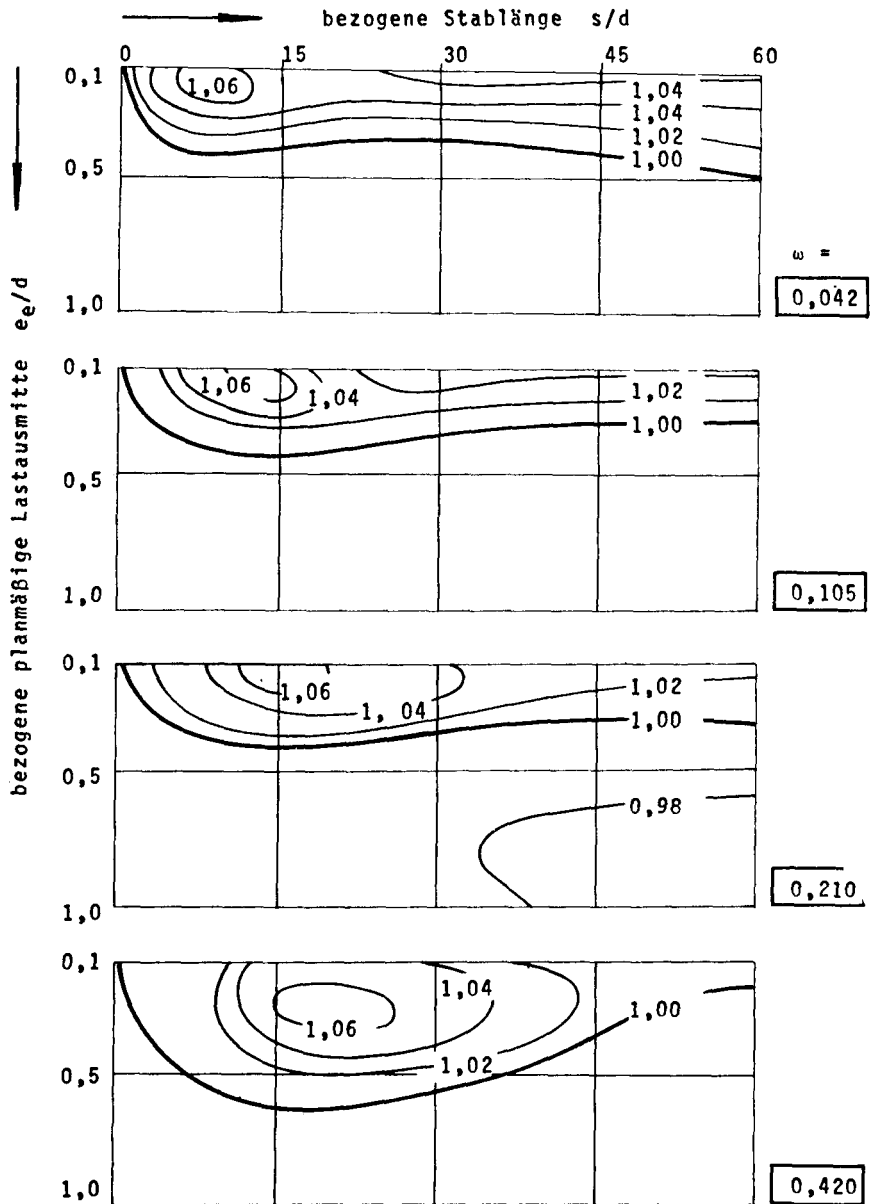


Abbildung 16

Verlauf der Linien mit gleichem Quotienten $v_{(N)}/v$

v = exakter Wert der Durchbiegung im Traglastzustand
 $v_{(N)}$ = Durchbiegung aufgrund der Vereinfachung 4,
 parabelförmiger Krümmungsverlauf

Stahlfestigkeit: $\beta_s = 24\,000 \text{ Mp/m}^2$

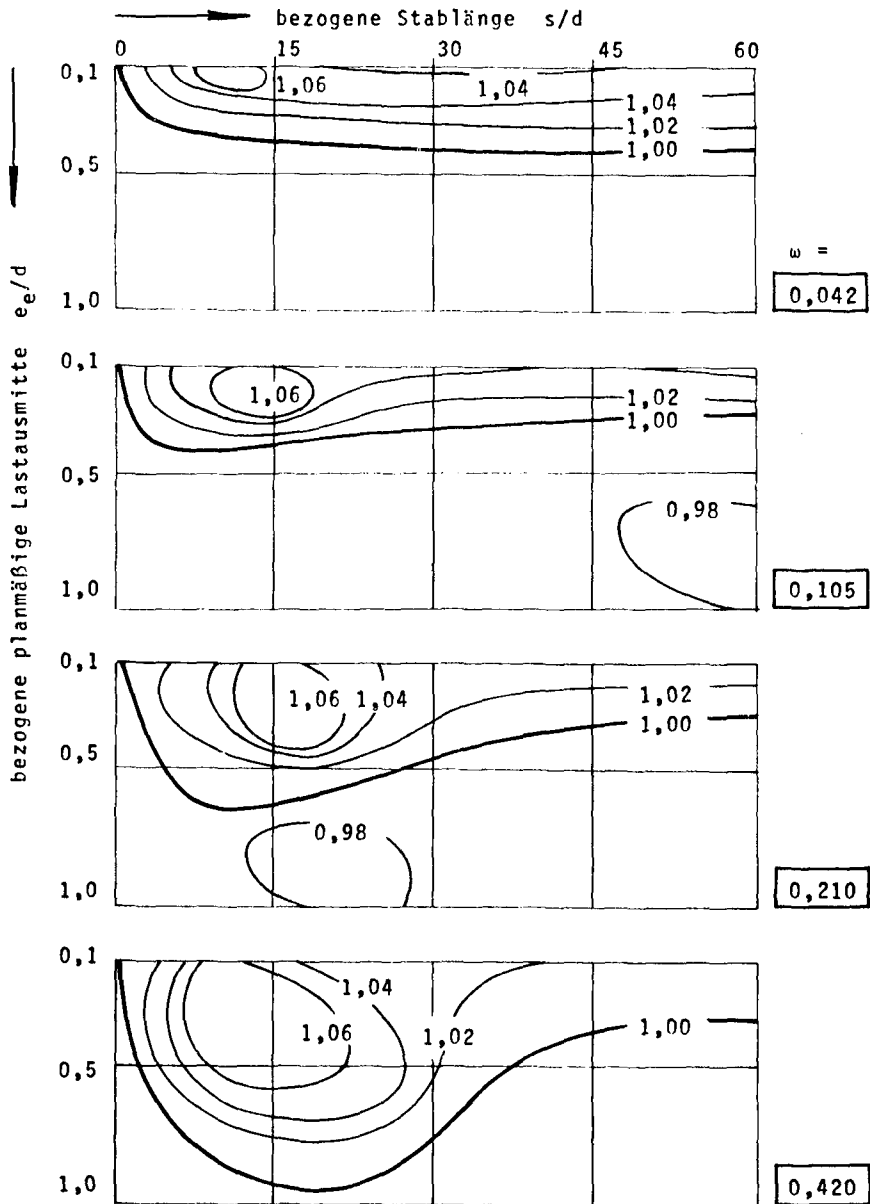


Abbildung 17

Verlauf der Linien mit gleichem Quotienten $v_{(N)}/v$

v = exakter Wert der Durchbiegung im Traglastzustand

$v_{(N)}$ = Durchbiegung aufgrund der Vereinfachung 4, parabelförmiger Krümmungsverlauf

Stahlfestigkeit: $\beta_s = 42\ 000\ \text{Mp/m}^2$

4.2 Gleichgewichts- und Traglastzustand der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze

In der älteren Literatur wird das Traglastproblem ausmittig gedrückter Stäbe mit nichtlinearem Verformungsgesetz so gefaßt, daß entweder ein Stabilitätsproblem ohne Gleichgewichtsverzweigung oder ein Festigkeitsproblem für den Traglastzustand maßgebend wird. Zur Erläuterung dienen die beiden Abbildungen 18 und 19, in denen für eine konstante Normalkraft N und eine ebenfalls konstante Stablänge s die Größe des belastenden, äußeren Momentes $M_a = N \cdot (e_e + v_m)$ und die Größe des inneren Momentes M_i für den Mittenquerschnitt in Abhängigkeit der Stabverformung v_m dargestellt sind. Der Verlauf von M_i ist entsprechend dem nichtlinearen Verformungsgesetz auch nichtlinear und außerdem abhängig vom Quadrat der Stablänge s , wie es im vorangegangenen Abschnitt beschrieben worden ist. Der Stab ist im Gleichgewicht, wenn äußeres Moment M_a und inneres Moment M_i für gleiches v_m gleich groß sind.

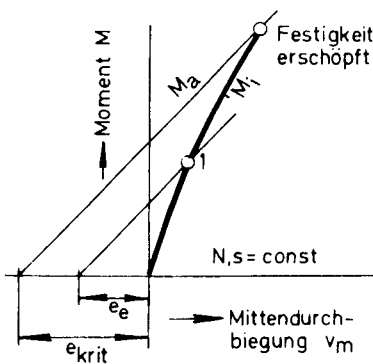


Abbildung 18 Festigkeitsproblem

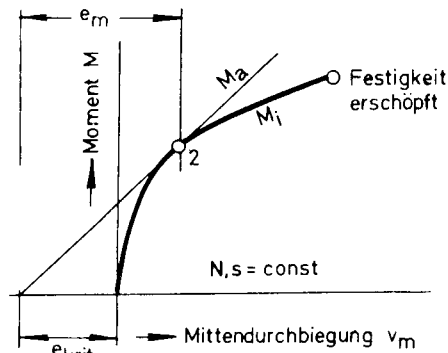


Abbildung 19 Stabilitätsproblem ohne Gleichgewichtsverzweigung

In Punkt 1 der Abbildung 18 herrscht ein stabiler Gleichgewichtszustand: Ein weiteres Anwachsen der Mittendurchbiegung v_m wird dadurch verhindert, daß M_i stärker als

M_a mit zunehmendem v_m anwachsen würde. Die größte zulässige Lastausmitte e_{krit} wird markiert, wenn Gleichgewichtspunkt 1 und der Erschöpfungspunkt der M_1 -Linie identisch sind. Ein Festigkeitsproblem liegt immer dann vor, wenn die Steigung der M_1 -Linie größer als diejenige für die M_a -Linie ist.

Der Verlauf der M_1 -Linie in Abbildung 19 führt das Traglastproblem auf ein Stabilitätsproblem. Die größte zulässige Lastausmitte e_{krit} wird dann erhalten, wenn der Gleichgewichtspunkt nicht mit dem Erschöpfungspunkt der M_1 -Linie identisch ist.

Der gleiche Sachverhalt lag auch bei Lösungsweg 2 zur Bestimmung der Traglast vor, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben wurde. Zu konstant gehaltenen Werten für N und s wurde bei der Integration der Differentialgleichung die obere Integrationsgrenze e_m so lange verringert, bis das Maximum für e_e und damit das zu N und s gehörige e_{krit} gefunden war. In Punkt 2 herrscht kein stabiles Gleichgewicht: Die M_a -Linie ist Tangente an die M_1 -Linie, die Steigungen beider Linien sind in Punkt 2 gleich groß. Das bedeutet, daß einem infinitesimalen Zuwachs dv_m gleiche Zuwächse dM_1 und dM_a entsprechen, so daß also auch die Gleichgewichtslage $v_m + dv_m$ möglich wäre. Eine nicht infinitesimale Vergrößerung der Last, der Stablänge oder der Lastausmitte ist jedoch nicht mehr möglich, weil hierfür keine neue Gleichgewichtslage gefunden werden kann.

Für praktische Berechnungen ist die grafische Methode zur Bestimmung von e_{krit} , wie sie mit Darstellungen nach Art der Abbildungen 18 und 19 möglich wäre, nicht geeignet, ihr kommt nur theoretische Bedeutung zur Beschreibung des Traglastproblems zu. KUPFER hat eine Variante zu dieser Methode entwickelt, wie sie für praktische Aufgaben durchaus anwendbar wäre [9] ⁺⁾ . Statt des Momentes wird die Lastexzentrizität e und an Stelle der Mittendurchbiegung v_m die Stabkrümmung K_m des Mittenquerschnittes aufgetragen.

⁺⁾ Fußnote siehe nächste Seite

Der M_i -Linie entspricht dann bei dieser Auftragung der Moment-Krümmungszusammenhang in Form einer e_i -Linie und ist unabhängig von s , was für die M_i -Linien in den Abbildungen 18 und 19 nicht zutraf. Hierin liegt der praktische Vorteil. Der M_a -Linie entspricht hier analog eine e_a -Linie, die allerdings im Gegensatz zur M_a -Linie von s abhängt, beispielsweise nach Gleichung (33):

$$(36) \quad e_a = e_m = \frac{s^2}{10} (K_m + \frac{1}{4} K_e) + e_e$$

Abbildung 20 ist geeignet, die Traglast N_{krit} zu vorgegebenem e_e und s zu bestimmen, hierzu ist die e_a -Linie deren Anstieg $(s^2/10)K_m$ beträgt, in diejenige Höhenlage zu legen, die auf der Ordinatenachse den Abschnitt $e_e + (s^2/40)K_e$ markiert. Die tangierte e_i -Linie gibt mit ihrem zugehörigen Parameter die Traglast an.

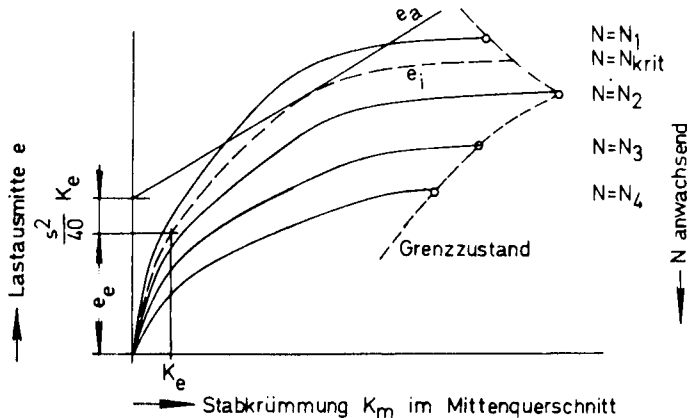


Abbildung 20 Traglastbestimmung in einem e-K-Diagramm

- +) In einer anderen im September 1968 erschienenen Veröffentlichung [1c] wird diese Methode beschrieben, wobei die Vereinfachung eines sinusförmigen Verlaufes der Stabachse im ausgebogenen Zustand nach Gleichung (22) angewendet wird.

Die Abbildungen 18, 19 und 20 enthalten jeweils nur die Gleichgewichtslage der ausmittig gedrückten Stütze im Traglastzustand. Um alle Gleichgewichtslagen einer Stütze mit bestimmter Lastausmitte e_e und Stützenlänge s zu zeigen, kann eine dreidimensionale Darstellung der Abbildung 21 dienen. Sie enthält zwei räumliche Flächen: Den Zustand der inneren Schnittgrößen, dargestellt als N_i und e_i in Abhängigkeit der Stabkrümmung K , und den Zustand der äußeren Schnittgrößen, ebenfalls als N_a und e_a in Abhängigkeit von K dargestellt. Der Zustand der inneren Schnittgrößen ergibt eine stark gewölbte Fläche, in Abbildung 21 sind die Linien $N_i = \text{const}$ und $e_i = \text{const}$ dargestellt. Demgegenüber ist der Zustand der äußeren Schnittgrößen durch eine fast ebene Fläche wiedergegeben. Entsprechend Gleichung (36) und wie in Abbildung 20 dargestellt ist, wird für $K=0$ der mit N anwachsende Ordinatenabschnitt $e_e + (s^2/40)K_e$ markiert. Entsprechend dem nichtlinearen Verlauf der N - K -Linie für $e = \text{const}$ verläuft auch der Ordinatenabschnitt nicht linear und verursacht eine leichte Wölbung der Zustandsfläche der äußeren Schnittgrößen in Richtung der N -Achse.

Die Durchdringungslinie beider Flächen markiert alle theoretisch möglichen Gleichgewichtslagen, es ist zu erkennen, daß für den dargestellten Fall der Wert der Normalkraft N mit wachsendem e oder K ebenfalls anwächst, bis er einen Maximalwert erreicht hat und dann abfällt, bis der Erschöpfungszustand erzielt wird. Dieser Maximalwert für N ist gleich der Traglast der Stütze. Es ist leicht vorzustellen, daß beispielsweise für den gleichen Wert der planmäßigen Lastausmitte e_e aber für eine kleinere Stablänge s - was einem flacheren Anstieg der Zustandsfläche für die äußeren Schnittgrößen entspricht - die Durchdringungslinie kein Maximum für N ergibt, sondern stetig bis zum Erreichen des Erschöpfungszustandes ansteigt. Für den Grenzfall $s = 0$ entspräche die Durchdringungslinie der Linie $e = \text{const}$ innerhalb der Zustandsfläche für die inneren Schnittgrößen, diese Linie hat kein relatives Maximum.

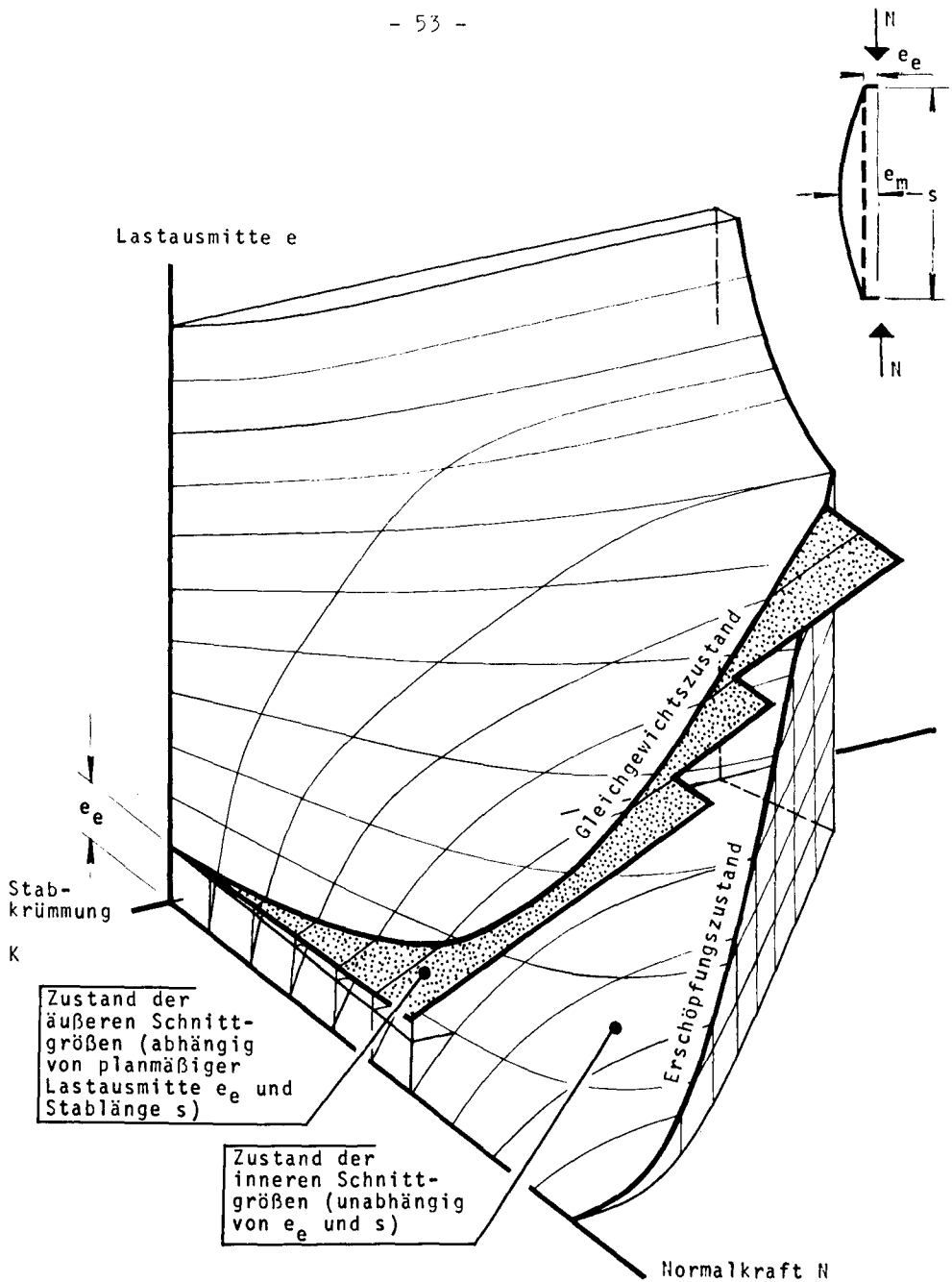
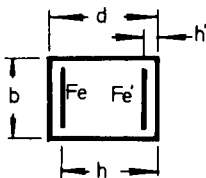


Abbildung 21 Gleichgewichtszustand der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze. Für die Werte K_m und e_m des Mittenquerschnitts gibt die Darstellung mit $K=K_m$ und $e=e_m$ die zugehörige Normalkraft an.

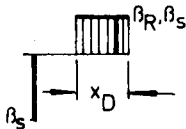
Ob die Traglast durch Erreichen des Erschöpfungszustandes oder durch vorzeitiges Erreichen eines Maximalwertes festgelegt ist, hängt wesentlich auch von der Definition des Erschöpfungszustandes ab, d.h. von der Festlegung der Grenzdehnungen oder Grenzdehnungszustände. Für die Annahme voller Plastifizierbarkeit des Querschnitts, d.h. daß die Krümmung unbegrenzte Werte erreichen darf, läßt sich für den symmetrisch bewehrten Querschnitt - anders bewehrte Querschnitte verhalten sich in diesem Zusammenhang nicht grundsätzlich verschieden - leicht zeigen, daß die Traglast immer durch Erreichen eines Maximalwertes für die Normalkraft festgelegt ist.

Für $h' < x_D < h$ gilt:



$$(37) \quad N_i = x_D \cdot b \cdot \beta_R$$

$$(38) \quad M_i = x_D \cdot b \cdot \beta_R \frac{d - x_D}{2} + Fe \cdot \beta_S \cdot (h - h')$$



$$e_i = \frac{M_i}{N_i} = \frac{d - x_D}{2} + \frac{Fe \cdot \beta_S \cdot (h - h')}{N_i}$$

$$(39) \quad e_i = \frac{d - \frac{N_i}{b \cdot \beta_R}}{2} + \frac{Fe \cdot \beta_S \cdot (h - h')}{N_i}$$

Gleichung (39) ergibt einen hyperbelartigen Verlauf für den Zusammenhang zwischen Lastausmitte e_i und Normalkraft N_i , er gilt für Werte der Stabkrümmung $K \rightarrow \infty$.

Die Lastausmitte e_a für den Zustand der äußeren Schnittgrößen wächst mit $K_m \rightarrow \infty$ über alle Grenzen, siehe Gleichung (36), so daß Gleichung (39) für diese Gleichgewichtslage den Wert $N \rightarrow 0$ als Normalkraft ergibt. Die Durchdringungslinie ergibt also die Werte $N = 0$ für $K_m = 0$ und $K_m \rightarrow \infty$, dazwischen liegt dann aber zwangsläufig ein Maximum für N , wenn $N \neq 0$ wird für endliche Werte K_m .

Über zweckmäßige Vereinfachungen in bezug auf die Definition des Erschöpfungszustandes wird in dem späteren Abschnitt 4.4 berichtet werden. Hier sollen zunächst noch einige Ausführungen über die Verwendbarkeit einer Darstellung nach Abbildung 21 für den praktischen Gebrauch gemacht werden.

Die zeichnungstechnischen Schwierigkeiten einer dreidimensionalen Darstellung lassen sich vermeiden, wenn die dritte Dimension in Form von Höhenlinien in einer zweidimensionalen, ebenflächigen Darstellung enthalten ist. Die räumliche Darstellung nach Abbildung 21 wird als Projektion auf die K-N-Ebene verwendet, in der die Linien $e = \text{const}$ quasi als Höhenlinien enthalten sind. Eine derartige Darstellung ist praktisch geeignet, die Gleichgewichtslagen einer ausmittig gedrückten Stütze für vorgegebene Lastausmitte e_e und Stablänge s zu bestimmen, also einen Stützenversuch nachzurechnen. Hierzu soll als Beispiel die Nachrechnung der Versuchsstütze A I gezeigt werden, die am Institut für Baustoffkunde und Stahlbeton der TU Braunschweig untersucht worden war.

Querschnittswerte und Spannungs-Dehnungsgesetze sind aus Abbildung 22 zu entnehmen. Programmgesteuert wurde das Verformungsgesetz in Form des Zusammenhanges e , N und K für die nachfolgend angegebenen Querschnittswerte und Elastizitätsgesetze berechnet.

Die Ergebnisliste der programmgesteuerten Berechnung ist nachstehend auf Seite 57 wiedergegeben. Es ist anzumerken, daß nur eine begrenzte Anzahl der tatsächlich errechneten Wertegruppen N-K ausgeschrieben wurde, während für die ebenfalls programmgesteuerte Erstellung der zeichnerischen Darstellung alle Wertegruppen verwendet wurden. Zur Darstellung der Gleichgewichtslagen der Versuchsstütze A I wird ein Ausschnitt aus Abbildung 23 verwendet. Es werden die Werte der Normalkraft N zu vorgegebenen Werten für die Gesamlastausmitte $e = e_m$ in Stabmitte errechnet. Zu einem Näherungswert N' werden aus Abbildung 24 die Krümmungswerte

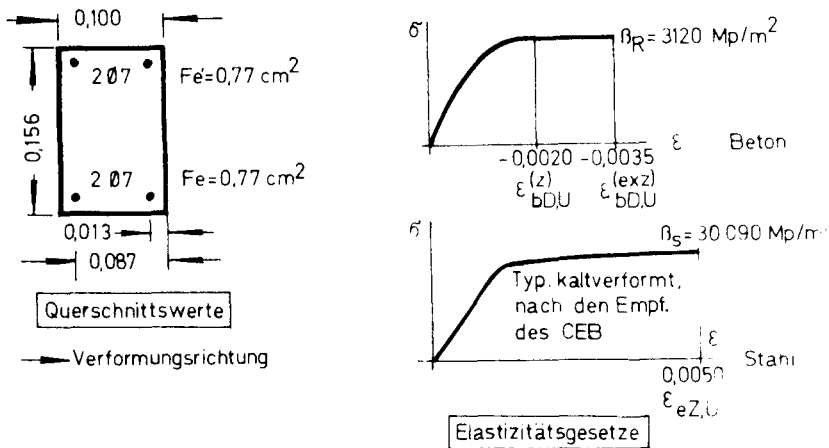


Abbildung 22 Querschnittswerte und Elastizitätsgesetze zu Versuchsstütze A1

in Stabmitte $K(e_m, N')$ und an der Lasteintragungsstelle $K(e_e, N')$ sowie deren jeweilige Gradienten $\frac{\partial K}{\partial N}(e_m, N')$ und $\frac{\partial K}{\partial N}(e_e, N')$ abgelesen.

Gleichung (36) wird zu:

$$(40) \quad e_m = \frac{s^2}{10} \left\{ K(e_m, N') + \frac{1}{4} K(e_e, N') + dN \left[\frac{\partial K}{\partial N}(e_m, N') + \frac{1}{4} \frac{\partial K}{\partial N}(e_e, N') \right] \right\} + e_e.$$

Hieraus läßt sich N berechnen:

$$(41) \quad N = N' + dN = N' + \frac{\frac{10(e_m - e_e)}{s^2} - K(e_m, N') - \frac{1}{4} K(e_e, N')}{\frac{\partial K}{\partial N}(e_m, N') + \frac{1}{4} \frac{\partial K}{\partial N}(e_e, N')}.$$

Für praktische Berechnungen ist die Verwendung der 10^3 -fachen Werte für die Krümmungen und Ausmitten, wie in Tafel 1 geschehen, zweckmäßig.

VERSUCHSSTUETZE A I	(S/D = 3.00 M/ 0.10 M	E = 0.02 M)
---------------------	------------------------	--------------

QUERSCHNITTSWERTE		(D=0.100 M B=0.156 M MUE=MUE*=0.00491)	
NK	X (M)	B (M) FE (M2)	BETON STAHL
1	0.500E-01	0.156E 03	
2	-0.500E-01	-0.156E 00	
3	0.370E-01	0.766E-04	
4	-0.370E-01	0.766E-04	

MATERIALKENNWERTE		(BETONFESTIGKEIT AM VERSUCHSTAG)					
BETA W	EB DE U	EB DZ U	EB BZ	A	S	L	
3635.0	-3.00350	-0.00200	0.	2.00	3.86	2	
BETA S	EE Z U	UEBERGANGSBOGEN					
30093.0	0.30500	1					

MOMENT-KRUEMMUNGS-BEZIEHUNG				(K IN ABHAENGIGKEIT VON N FUER KONSTANTE EXZENTRIZITAET E)					
E (M)	NORMALKRAFT N 1000-FACHE STABKRUEMMUNG K					(MP) (1/M)			
0.055	0.00	3.00	6.48	8.44	9.35	9.90	10.10	10.23	10.32
	0.	9.57	21.79	33.85	45.07	55.90	66.30	76.62	86.87
0.050	0.00	3.68	7.94	10.47	11.60	12.17	12.37	12.49	12.58
	0.	9.82	22.66	35.58	47.64	59.45	70.73	81.94	93.09
0.045	0.00	4.67	10.02	12.79	13.99	14.65	15.01	15.15	15.26
	0.	10.16	23.88	34.68	45.05	55.65	66.65	78.37	90.16
0.040	0.00	6.19	12.11	15.00	16.54	17.33	17.79	18.10	18.29
	0.	10.66	23.29	31.37	39.66	48.37	57.24	66.21	75.42
0.035	0.00	8.55	14.32	17.37	19.24	20.30	20.88	21.26	21.53
	0.	11.39	21.38	28.61	35.44	42.36	49.65	57.03	64.46
0.030	0.00	11.83	17.09	20.33	22.20	23.35	24.11	24.64	25.02
	0.	12.00	19.33	25.74	31.92	37.99	43.96	49.95	55.94
0.025	0.00	14.58	20.42	23.76	25.72	26.83	27.58	28.11	28.47
	0.	10.95	17.28	22.93	28.46	34.01	39.44	44.82	50.22
0.020	0.00	17.74	24.15	27.65	29.70	30.88	31.56	32.00	32.35
	0.	9.96	15.42	20.36	25.26	30.16	35.15	40.16	45.06

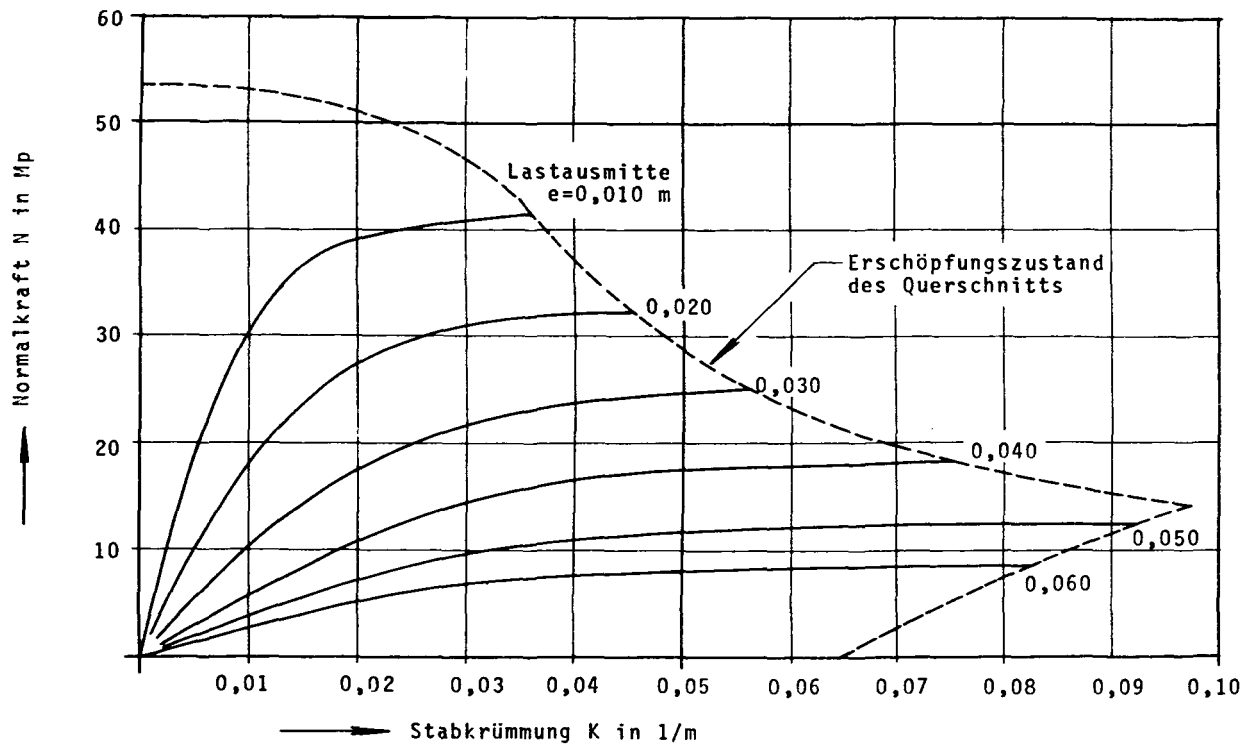


Abbildung 23

Verformungszusammenhang eines Stahlbetonquerschnitts am Beispiel der Versuchsstütze A I.

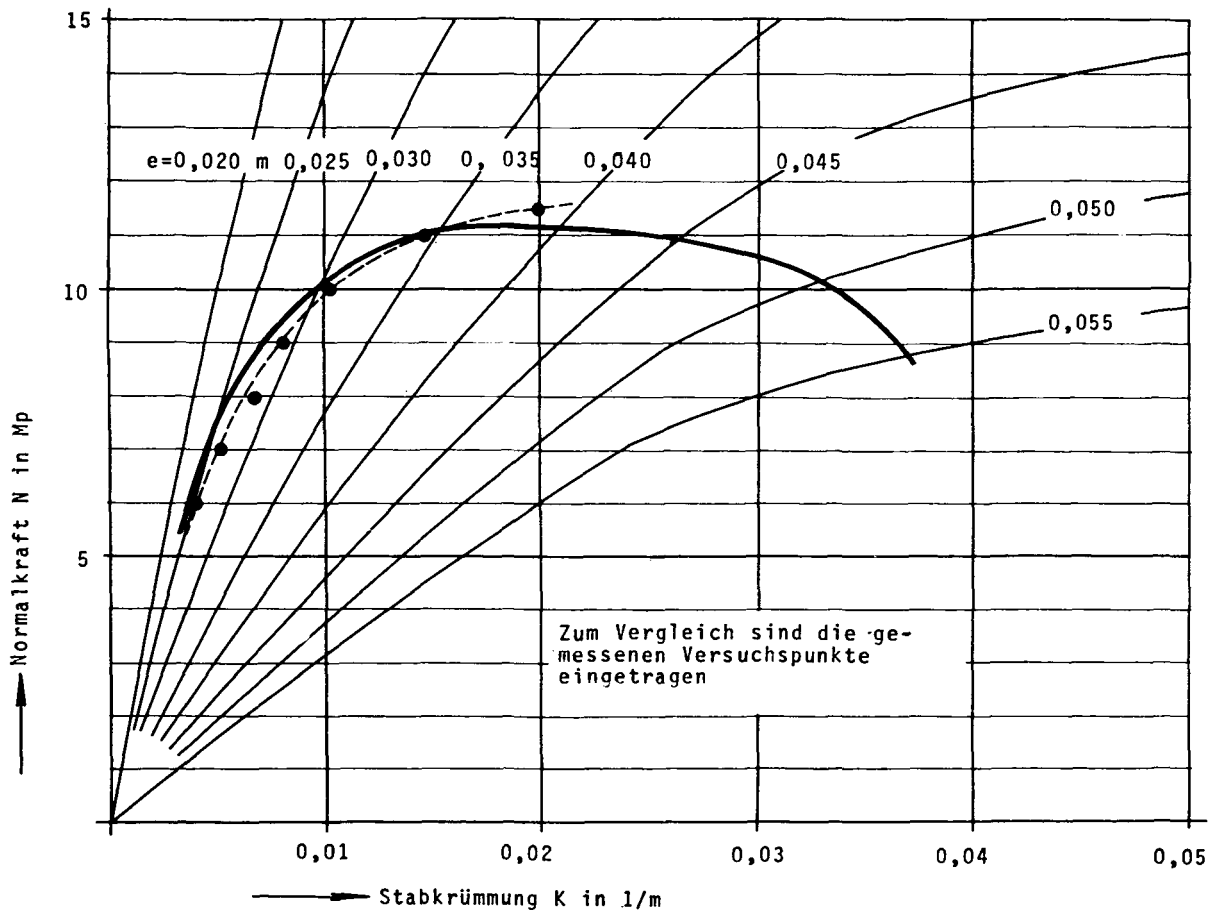


Abbildung 24 Gleichgewichtszustand einer ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze - (Normalkraft N und Stabkrümmung K in Abhängigkeit der Stützhöhe l mit der Mitte e der Mittellängsachse)

vorgegeben			abgelesen aus Abbildung 24				vorgegeben	berechnet Gl. (41)
s	e _m	e _e	K(e _m , N')	K(e _e , N')	$\frac{K(e_m, N')}{N}$	$\frac{K(e_e, N')}{N}$	N'	N
3,00 	30	20	9,80	5,00	1,10	0,55	10	10,04
	35		15,20	5,60	1,60	0,55	11	11,03
	40		20,60	5,60	2,20	0,55	11	11,09
	45		23,80	5,00	2,80	0,55	10	10,92
	50		31,00	5,00	6,80	0,55	10	10,15
	55		39,80	4,50	8,60	0,55	9	8,77

Tafel 1: Berechnung der Gleichgewichtslagen für
Versuchsstütze A I

Die rechnerisch ermittelte Gleichgewichtslage wird durch die Versuchswerte sehr gut bestätigt, das ist natürlich nicht in allen Fällen zu erwarten (vgl. Abschnitt 3.4).

An Stelle die zugehörige Normalkraft N zu einem vorgegebenen Wert für die Gesamtlastausmitte e_m zu berechnen, kann das Verfahren natürlich auch umgekehrt werden: Zu einem vorgegebenen Wert N wird die Gesamtlastausmitte e_m in Stabmitte berechnet, wobei auch wieder von einem Näherungswert e'_m ausgegangen wird.

$$(42) \quad e'_m + de_m = \frac{s^2}{10} [K(e'_m, N) + \frac{\partial K}{\partial e}(e'_m, N) \cdot de_m + \frac{1}{4} K(e_e, N)] + e_e$$

Hieraus wird:

$$e_m = e'_m + \Delta e_m$$

$$(43) \quad e_m = \frac{e'_m \cdot \frac{\partial K}{\partial e}(e'_m, N) - K(e'_m, N) - \frac{1}{4} K(e'_e, N) - \frac{10}{s^2} e_e}{\frac{\partial K}{\partial e}(e_m, N) - \frac{10}{s^2}}$$

4.3 Bestimmung der Bereiche mit voneinander verschiedenen Kriterien für den Traglastzustand

In Abschnitt 4.1 war bereits gesagt worden, daß der Hauptaufwand zur Lösung des Traglastproblems in der Integration der Differentialgleichung für das nichtlineare Verformungsgesetz sowie in der Variation der oberen Integrationsgrenze zur Optimierung der errechneten Freigröße liegt. Zur Vereinfachung der Integration waren im vorangegangenen Abschnitt verschiedene Vereinfachungsmöglichkeiten untersucht worden. Gegenstand der Untersuchungen dieses Abschnittes ist eine Aussage über die erforderliche Variation der Integrationsgrenzen, was offensichtlich deswegen notwendig ist, weil der Traglastzustand nicht immer mit dem Material-Erschöpfungszustand identisch zu sein braucht. Die diesbezüglichen Zusammenhänge sind im wesentlichen bekannt, einige ergänzende Anmerkungen hierzu waren ebenfalls im vorangegangenen Abschnitt gemacht worden. Im wesentlichen kommt es zunächst darauf an, den Bereich, in dem der Traglastzustand durch Erreichen eines instabilen Gleichgewichtes bestimmt wird, von demjenigen Bereich zu trennen, in dem Traglastzustand und Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts identisch sind. Hierzu ist es notwendig, die Grenze zwischen beiden Bereichen zu bestimmen und zu klären, wie der Verlauf dieser Grenze von dem definierten Erschöpfungszustand abhängt.

Das Gleichgewicht in der ausmittig gedrückten Stütze ist dann vorhanden, wenn Gleichung (36) erfüllt ist. Dies ergibt die Zusammenhänge der Abbildung 25 in einer Darstellung des Verformungsgesetzes in Art der Moment-Krümmungsbeziehung, die übrigens viele Parallelen mit der Darstellung in Abbildung 20 hat.

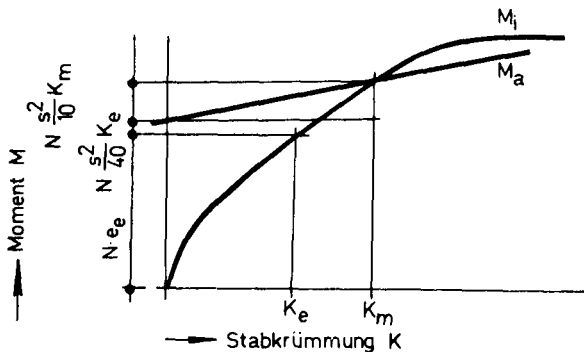


Abbildung 25 Gleichgewichtszustand der ausmittig gedrückten Stütze

Ist der Gleichgewichtszustand außerdem auch noch instabil, so müssen die Gradienten der M_a - und M_i -Linie im Gleichgewichtspunkt gleich groß sein, dies ergibt Gleichung (44).

$$(44) \quad N \frac{s^2}{10} = \frac{dM}{dK}$$

Hieraus läßt sich zu jedem vorgegebenen Punkt der Moment-Krümmungslinie die zur Traglast N_{krit} gehörende kritische Stablänge s_{krit} bestimmen.

$$(44) \quad s_{krit} = \sqrt{\frac{dM}{dK} \cdot \frac{10}{N_{krit}}}$$

In der Nähe des Nullpunktes gelten für die Moment-Krümmungsbeziehung - kleine Werte N_{krit} vorausgesetzt - die

Beziehungen der Elastizitätstheorie. Mit

$$(45) \quad \frac{dM}{dK} = EI$$

wird aus Gleichung (44):

$$N_{\text{krit}} \frac{s^2}{10} = EI ,$$

oder

$$(46) \quad N_{\text{krit}} = \frac{10 \cdot EI}{s^2} \sim 1,01 \frac{\pi^2 \cdot EI}{s^2} .$$

Es ist die bekannte Lösung der Elastizitätstheorie für die Traglast, hier dann Knicklast genannt, bei einer planmäßigen Lastausmitte $e_e = 0$.

In der weiteren Untersuchung wird die kritische Stablänge s_{krit} nach Gleichung (44) bestimmt, jeweils für die Bedingung, daß instabiler Gleichgewichtspunkt und Erschöpfungspunkt identisch sind. Der so bestimmte Wert s_{krit} ist dann gleichzeitig die Grenze zwischen den Bereichen, in denen einerseits die Traglast durch Erreichen des Erschöpfungszustandes des Mittenquerschnitts und andererseits durch Erreichen eines instabilen Gleichgewichtes festgelegt ist. Nur für Werte $s > s_{\text{krit}}$ tritt ein instabiler Gleichgewichtszustand auf.

Zur analytischen Bestimmung des Gradienten $\frac{dM}{dK}$ der Moment-Krümmungsbeziehung wird das Elastizitätsgesetz für Beton nach dem Parabel-Rechteckdiagramm verwendet, für Stahl eine ideal elastisch, ideal plastische Arbeitslinie, wie sie für praktische Berechnungen für alle naturharten Stähle verwendet wird. Beide Spannungs-Dehnungsgesetze sind in Abbildung 26 dargestellt.

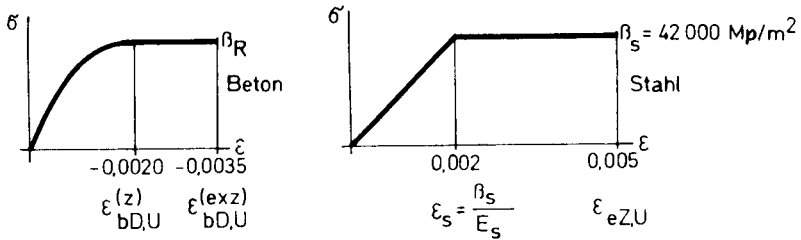


Abbildung 26 Elastizitätsgesetze für Beton und Stahl

Die verschiedenen definierten Erschöpfungszustände werden durch unterschiedliche Festlegungen der Größtwerte für die Dehnungen erhalten. Für $\epsilon_{bD,U}^{(exz)}$ werden die Werte $-0,0035$, $-0,0030$, $-0,0025$ und $-0,0020$ untersucht, für $\epsilon_{eZ,U}$ die Werte $0,005$, $0,002+d\epsilon$ und $0,002-d\epsilon$.

Der Dehnungszustand des Rechteckquerschnitts wird durch die Druckranddehnung, die hier vereinfachend mit ϵ bezeichnet wird, weil Verwechslungen ausgeschlossen sind, und die Stabkrümmung K beschrieben, wie in Abbildung 27 angegeben.

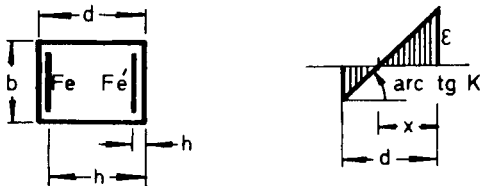
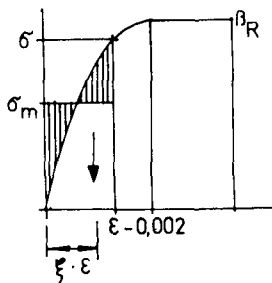


Abbildung 27 Bewehrter Rechteckquerschnitt und Dehnungszustand

Zur Bestimmung der Betondruckkraft und ihres Momentes in bezug auf die Querschnittsachse werden die Hilfsgrößen σ_m und ξ verwendet.



$$(47) \quad \sigma_m = \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} \sigma(\epsilon) \cdot d\epsilon$$

$$(48) \quad \xi = \frac{1}{\epsilon^2 \cdot \sigma_m} \int_0^{\epsilon} \epsilon \cdot \sigma(\epsilon) \cdot d\epsilon$$

Es sind die beiden Fälle $\epsilon > -0,002$ und $\epsilon \leq -0,002$ zu unterscheiden.

$$\underline{\epsilon > -0,002} \quad (49) \quad \frac{\sigma}{\beta_R} = -2,5 \cdot 10^5 \cdot \epsilon (0,004 + \epsilon)^{+)}$$

$$(50) \quad \frac{\sigma_m}{\beta_R} = -8,33 \cdot 10^4 \cdot \epsilon (0,006 + \epsilon)$$

$$(51) \quad \xi = \frac{0,016 + 3\epsilon}{0,024 + 4\epsilon}$$

$$\underline{\epsilon \leq -0,002} \quad (52) \quad \frac{\sigma}{\beta_R} = 1$$

$$(53) \quad \frac{\sigma_m}{\beta_R} = 1 + \frac{0,002}{3 \cdot \epsilon}$$

$$(54) \quad \xi = \frac{6\epsilon^2 - 0,002^2}{4\epsilon(3\epsilon + 0,002)}$$

⁺) Druckkräfte sind bisher stets positiv angesetzt, dementsprechend werden auch Druckspannungen als Positiv bezeichnet. Druckdehnungen sind negativ.

Die Anteile von Beton und Stahl an den inneren Schnittgrößen N und M werden getrennt für sich berechnet.

$$\text{Betonanteile} \quad (55) \quad x = -\frac{\epsilon}{K}$$

$$\text{Dehnungs-Nulllinie innerhalb des Querschnitts} \quad (56) \quad n = \frac{N}{b \cdot d \cdot \beta_R} = \frac{x \cdot \sigma_m}{d \cdot \beta_R} = \frac{-\epsilon \cdot \sigma_m}{K \cdot d \cdot \beta_R}$$

$$(57) \quad m = \frac{M}{b \cdot d^2 \cdot \beta_R} = n [0,5 + (1-\xi) \frac{\epsilon}{d \cdot K}]$$

$$\underline{\epsilon > -0,002}$$

$$(59) \quad n = \frac{8,33 \cdot 10^4}{K \cdot d} \epsilon^2 (0,006 + \epsilon)$$

$$(60) \quad \frac{\partial n}{\partial \epsilon} = \frac{8,33 \cdot 10^4}{K \cdot d} \epsilon (0,012 + 3\epsilon)$$

$$(61) \quad \frac{\partial n}{\partial (K \cdot d)} = -\frac{8,33 \cdot 10^4}{(K \cdot d)^2} \epsilon^2 (0,006 + \epsilon)$$

$$m = \frac{8,33 \cdot 10^4}{K \cdot d} \epsilon^2 (0,006 + \epsilon) [0,5 + \frac{0,008 + \epsilon}{0,024 + 4\epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{K \cdot d}]$$

$$(62) \quad = \frac{8,33 \cdot 10^4}{K \cdot d} \epsilon^2 [0,003 + \epsilon (0,5 + \frac{0,008 + \epsilon}{4 K \cdot d})]$$

$$(63) \quad \frac{\partial m}{\partial \epsilon} = \frac{8,33 \cdot 10^4}{K \cdot d} \epsilon [0,006 + \epsilon (1,5 + \frac{0,006 + \epsilon}{K \cdot d})]$$

$$(64) \quad \frac{\partial m}{\partial (K \cdot d)} = \frac{8,33 \cdot 10^4}{(K \cdot d)^2} \epsilon^2 [-0,003 - \epsilon (0,5 + \frac{0,008 + \epsilon}{2 K \cdot d})]$$

$$\underline{\epsilon \leq -0,002}$$

$$(65) \quad n = - (1 + \frac{0,002}{3\epsilon}) \frac{\epsilon}{K \cdot d} = -\frac{1}{3 K \cdot d} (3\epsilon + 0,002)$$

$$(66) \quad \frac{\partial n}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{K \cdot d}$$

$$(67) \quad \frac{\partial n}{\partial (K \cdot d)} = \frac{3\epsilon + 0,002}{3(K \cdot d)^2} = -\frac{n}{K \cdot d}$$

$$(69) \quad m = - \frac{3\varepsilon + 0,002}{3 \cdot K \cdot d} \left[0,5 + \frac{6\varepsilon^2 + 0,008\varepsilon + 0,002^2}{4\varepsilon(3\varepsilon + 0,002)} \cdot \frac{\varepsilon}{K \cdot d} \right]$$

$$= - \frac{1}{3 \cdot K \cdot d} \left[0,001 + 1,5\varepsilon + \frac{1}{4 \cdot K \cdot d} (6\varepsilon^2 + 0,008\varepsilon + 0,002^2) \right]$$

$$(70) \quad \frac{\partial m}{\partial \varepsilon} = - \frac{1}{3 \cdot K \cdot d} \left[1,5 + \frac{1}{4 \cdot K \cdot d} (12\varepsilon + 0,008) \right]$$

$$= - \frac{1}{K \cdot d} (0,5 - n)$$

$$(71) \quad \frac{\partial m}{\partial (K \cdot d)} = \frac{1}{3(K \cdot d)^2} \left(0,001 + 1,5\varepsilon + \frac{6\varepsilon^2 + 0,008\varepsilon + 0,002^2}{2 \cdot K \cdot d} \right)$$

Stahlanteile Es werden nur die Formeln für die Zugbewehrung F_e angegeben, da sich die entsprechenden Formeln für die Druckbewehrung analog ergeben, an Stelle von h ist jeweils h' zu setzen.

$$(72) \quad \omega = \frac{F_e \cdot \beta_s}{b \cdot d \cdot \beta_R}$$

$$(73) \quad \varepsilon_e = \varepsilon + (K \cdot d) \cdot \frac{h}{d}$$

$\varepsilon_e / \varepsilon_s$

$$(74) \quad n = - \frac{\omega}{\varepsilon_s} \left[\varepsilon + (K \cdot d) \cdot \frac{h}{d} \right]$$

$$(75) \quad \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = - \frac{\omega}{\varepsilon_s}$$

$$(76) \quad \frac{\partial n}{\partial (K \cdot d)} = - \frac{\omega}{\varepsilon_s} \cdot \frac{h}{d}$$

$$(77) \quad m = \left(\frac{h}{d} - 0,5 \right) \frac{\omega}{\varepsilon_s} \left[\varepsilon + (K \cdot d) \cdot \frac{h}{d} \right]$$

$$(78) \quad \frac{\partial m}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{h}{d} - 0,5 \right) \frac{\omega}{\varepsilon_s}$$

$$(79) \quad \frac{\partial m}{\partial (K \cdot d)} = \left(\frac{h}{d} - 0,5\right) \cdot \frac{\omega}{\epsilon_s} \cdot \frac{h}{d}$$

$$|\epsilon_e| \geq |\epsilon_s|$$

$$(80) \quad n = -\omega \frac{\epsilon_e}{|\epsilon_e|}$$

$$(81) \quad \frac{\partial n}{\partial \epsilon} = 0$$

$$(82) \quad \frac{\partial n}{\partial (K \cdot d)} = 0$$

$$(83) \quad m = \left(\frac{h}{d} - 0,5\right) \cdot \omega \cdot \frac{\epsilon_e}{|\epsilon_e|}$$

$$(84) \quad \frac{\partial m}{\partial \epsilon} = 0$$

$$(85) \quad \frac{\partial m}{\partial (K \cdot d)} = 0$$

Durch Addieren aller anteiligen Beträge für Beton, Zugbewehrung und Druckbewehrung können zu vorgegebenen Werten ϵ und $K \cdot d$ die bezogene Normalkraft n sowie die vier partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial n}{\partial \epsilon}$, $\frac{\partial n}{\partial (K \cdot d)}$, $\frac{\partial m}{\partial \epsilon}$ und $\frac{\partial m}{\partial (K \cdot d)}$ bestimmt werden. Eine Vergrößerung des bezogenen Momentes m um den Betrag dm ist bei konstanter bezogener Normalkraft n mit einer Krümmungszunahme $d(K \cdot d)$ und einer Zunahme der Betonranddehnung $d\epsilon$ verbunden.

$$(86) \quad dm = \frac{\partial m}{\partial (K \cdot d)} d(K \cdot d) + \frac{\partial m}{\partial \epsilon} d\epsilon$$

Die Bedingung $n=\text{const}$ ergibt:

$$\frac{\partial n}{\partial \epsilon} d\epsilon + \frac{\partial n}{\partial (K \cdot d)} d(K \cdot d) = 0.$$

$$(87) \quad d\epsilon = - \frac{\partial n}{\partial (K \cdot d)} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial n} d(K \cdot d)$$

Mit (87) wird Gleichung (86) zu:

$$(88) \quad \frac{dm}{d(K \cdot d)} = \frac{\partial m}{\partial (K \cdot d)} - \frac{\partial m}{\partial \epsilon} \cdot \frac{\partial n}{\partial (K \cdot d)} \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial n}.$$

Die bezogene kritische Stablänge $\left(\frac{s}{d}\right)_{\text{krit}}$ errechnet sich aus Gleichung (44) und (88).

$$(89) \quad \left(\frac{s}{d}\right)_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{dm}{d(K \cdot d)} \cdot \frac{10}{n}}$$

Die Auswertung von Gleichung (89) für die weiter oben angegebenen Werte für die unterschiedlich definierten Erschöpfungszustände wurde programmgesteuert durchgeführt, das Ergebnis für zwei Bewehrungsgehalte ω ist in Abbildung 28 dargestellt. Für Werte der bezogenen Stablänge s/d zwischen Null und dem kritischen Wert ist der Traglastzustand des ausmittig gedrückten Stabes durch den Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts festgelegt, für größere Werte s/d tritt dagegen immer ein instabiler Gleichgewichtszustand auf, der die größte aufnehmbare Last, die Traglast, begrenzt.

Im Druckbruchbereich (vgl. Abbildung 5) verschiebt sich die Grenze zwischen beiden Bereichen mit abnehmender Betongrößtdehnung zu größeren Werten s/d hin. Eine nennenswerte Ausweitung des Bereiches "Erschöpfungszustand" tritt ein, wenn die Betongrößtdehnung $\max \epsilon_{bD,U}^{(exz)}$ auf $-0,002$ begrenzt wird, weil dann im ganzen Druckbruchbereich die Druckbewehrung im elastischen Bereich ($\epsilon_e > \epsilon_s = -0,002$) verbleibt und so die Druckbewehrung anteilmäßig an der Gesamtsteifigkeit des Verbundquerschnittes beteiligt ist.

Noch größer sind die Auswirkungen unterschiedlicher Definition des Erschöpfungszustandes im Zugbruchbereich, insbesondere zwischen den Werten $\epsilon_s + d\epsilon (\Delta \epsilon_s$, aber im plastischen Bereich) und $\epsilon_s - d\epsilon (\Delta \epsilon_s$, aber im elastischen Bereich). Zu jedem dieser beiden Dehnungswerte gehören gleiche Dehnungen, also auch gleiche Spannungen und innere Schnitt-

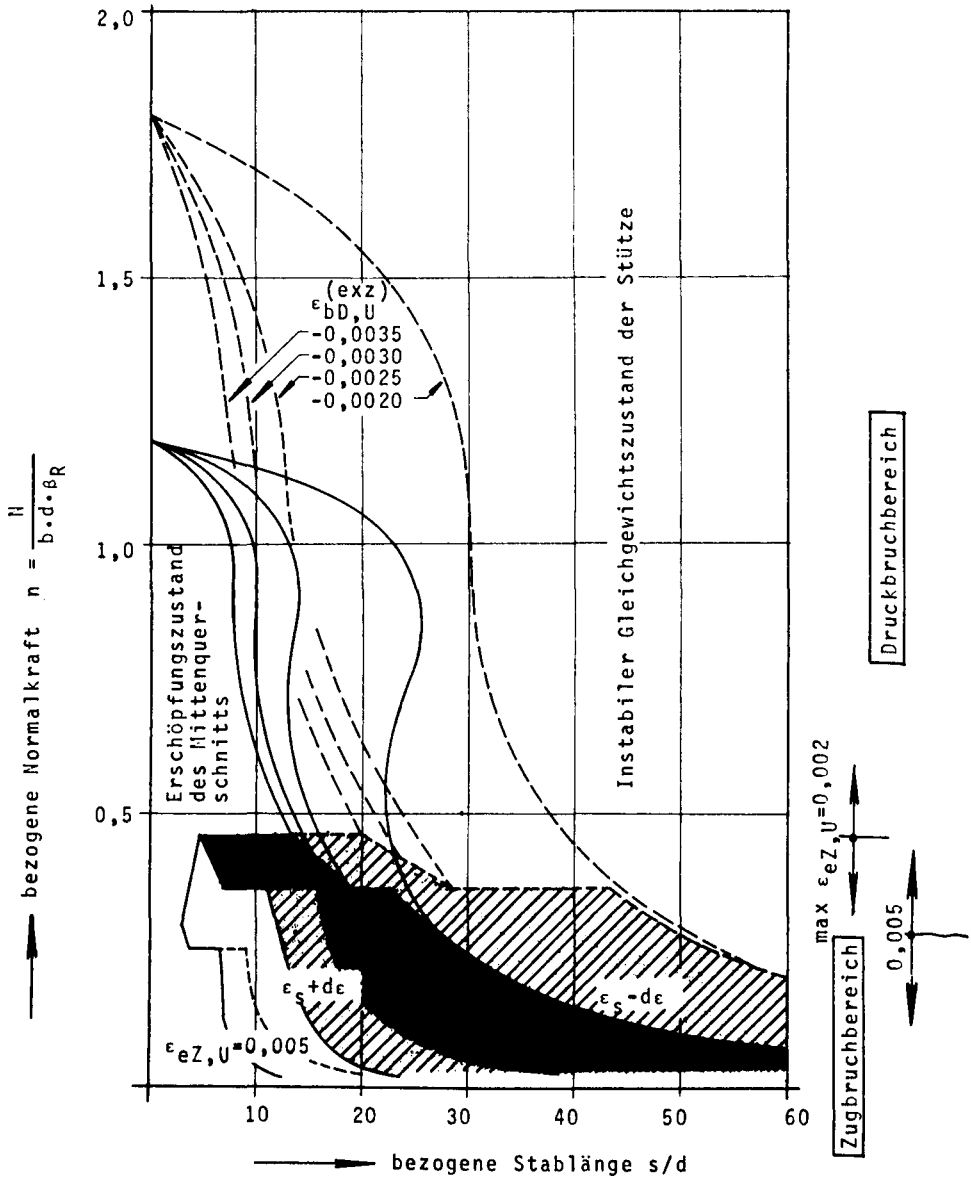


Abbildung 28

Abgrenzung der Bereiche für die beiden unterschiedlichen Kriterien des Traglastzustandes von Stahlbetonstützen mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt bei unterschiedlicher Definition des Erschöpfungszustandes.

— $\omega = \frac{F_e \cdot \beta_s}{b \cdot d \cdot \beta_R} = 0,10$

$\epsilon_s = \beta_s / E_s = 0,002$

--- $\omega = 0,40$

größen. Das bedeutet dann aber, daß für alle s/d zwischen den beiden Grenzen $\epsilon_s + d\epsilon$ und $\epsilon_s - d\epsilon$ die Traglast dann erreicht ist, wenn die Elastizitätsgrenze der Zugbewehrung ($\epsilon_s - d\epsilon$) im Mittenquerschnitt erreicht ist, - und zwar unabhängig von der Festlegung der maximal ausnutzbaren Stahlzugdehnung $\max \epsilon_{eZ,U}$. Zur besseren Veranschaulichung ist dieser Bereich in Abbildung 28 darstellungsmäßig hervorgehoben. Nur für kleine Werte ($s/d \lesssim 15$) ist eine Laststeigerung nach Erreichen des Wertes ϵ_s in der Stahlzugbewehrung überhaupt möglich. Entsprechend dem Traglastabfall in diesem Bereich, der, wie spätere Bilder zeigen werden, nur sehr klein ist, kann auch die mögliche Traglaststeigerung nach Überschreiten der Fließdehnung nur sehr klein sein.

Vereinfacht läßt sich folglich sagen, daß die Traglast stets dann erreicht ist, wenn bei Zugrundelegung einer ideal-elastischen, ideal-plastischen Stahlarbeitslinie (naturharter Stahl) die Fließdehnung des Stahls erreicht ist. Als Größtwert der Stahlzugdehnung ist praktischerweise diese Fließdehnung einzusetzen, im Zugbruchbereich treten Stabilitätsfälle dann nur bei größeren Schlankheiten auf. Von dieser zweckmäßigen Vereinfachung war bereits in einer früheren Veröffentlichung des Verfassers Gebrauch gemacht worden [7], ohne daß dort eine eingehende Begründung gegeben worden war.

Der dritte wichtige Systemparameter neben "Last" und "Stabschlankheit", die "planmäßige Lastausmitte", ist in Abbildung 28 nicht enthalten, er erst ermöglicht die endgültige Abgrenzung zwischen beiden Bereichen "Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts" und "Instabilität der Stütze", weil Abbildung 28 nicht den Bereich der tatsächlichen Traglasten angibt.

In Abbildung 29 und 30 sind die Bereichsgrenzen für $\max \epsilon_{bD,U}^{(exz)} = -0,002$ und $-0,0035$ sowie für $\max \epsilon_{eZ,U} = 0,005$ und $0,002 = \epsilon_s$ eingetragen; zusätzlich der Verlauf der

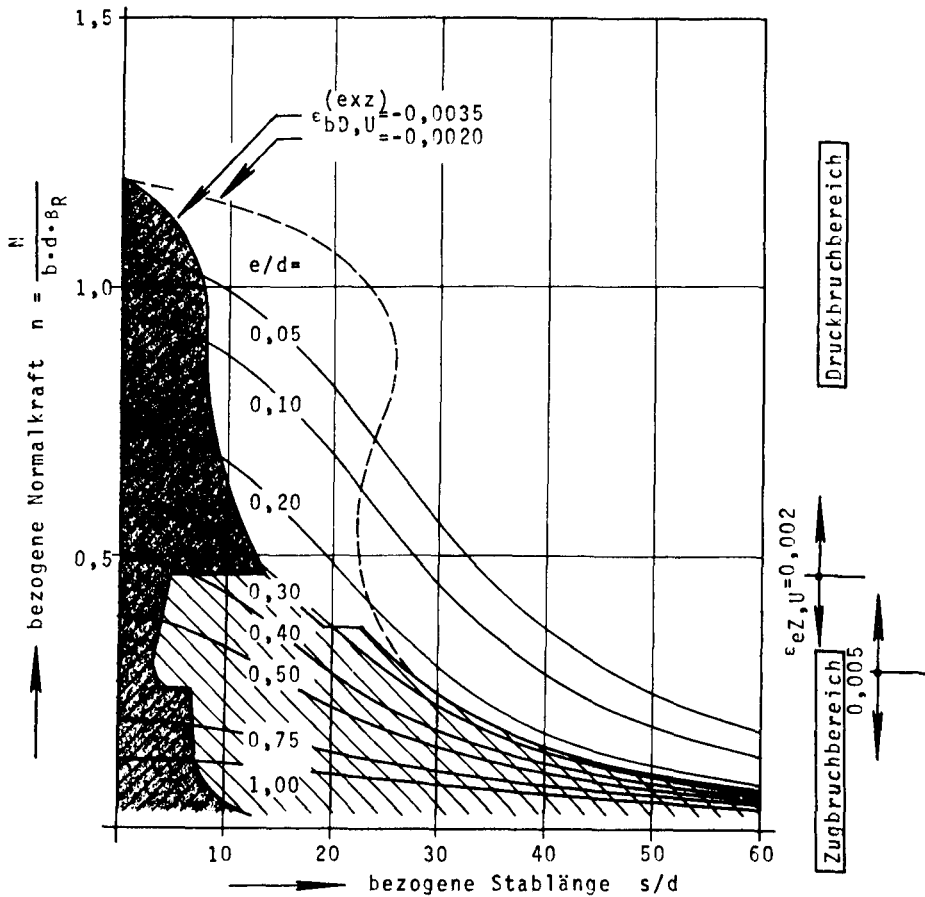


Abbildung 29

Bezogene Traglasten n für ausmittig gedrückte Stahlbetonstäbe mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt ($h=0,9 \cdot d$; $h'=0,1 \cdot d$) in Abhängigkeit von bezogener planmäßiger Lastausmitte e/d und bezogener Stablänge s/d .

Der Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts ist Kriterium für den Traglastzustand des Stabes bei

$\max \epsilon_{eZ,U} = 0,005$ $\max \epsilon_{eZ,U} = \epsilon_s = 0,002$

BSt 42/50 $\omega = \frac{F_e \cdot \beta_s}{(b \cdot d \cdot \beta_R)} = 0,10$

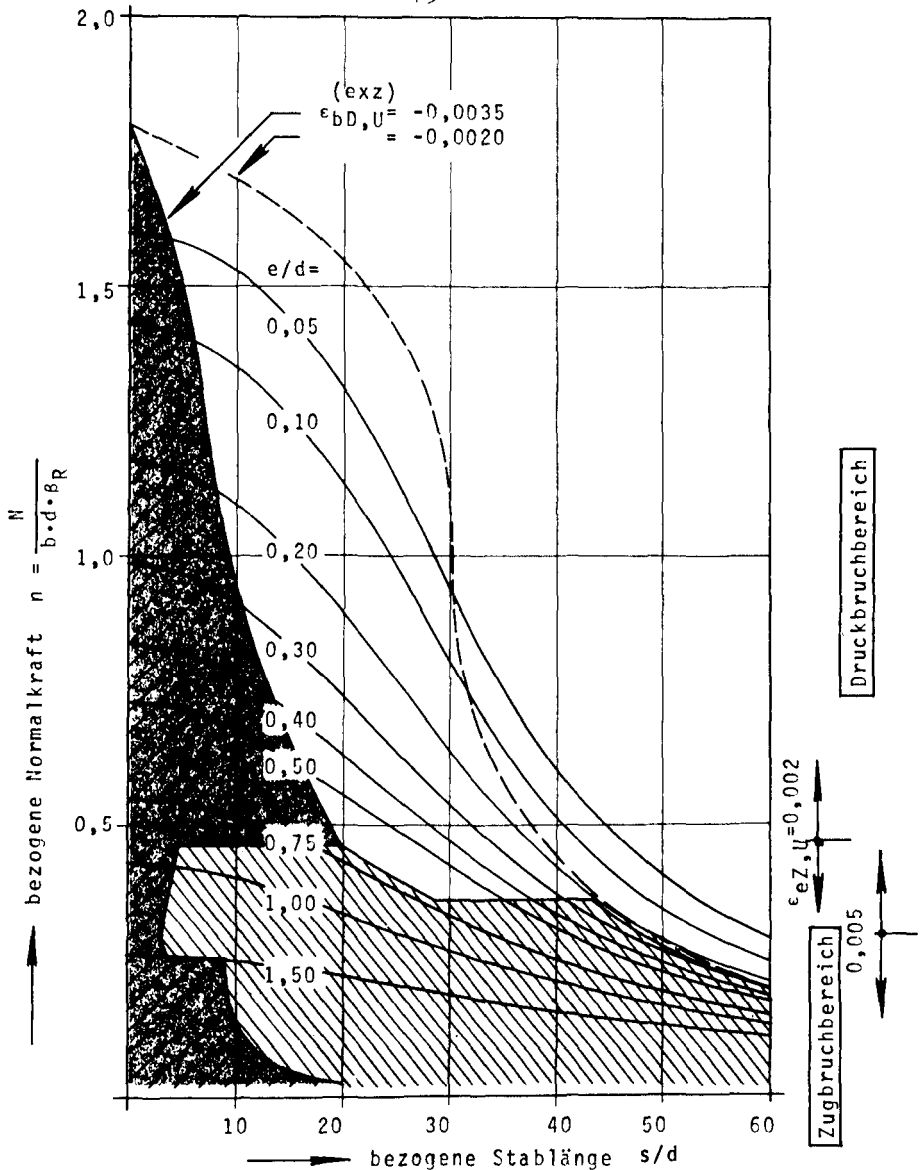


Abbildung 30

Bezogene Traglasten n für ausmittig gedrückte Stahlbetonstäbe mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt ($h=0,9 \cdot d$; $h'=0,1 \cdot d$) in Abhängigkeit von bezogener planmäßiger Lastausmitte e/d und bezogener Stablänge s/d .

Der Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts ist Kriterium für den Traglastzustand des Stabes bei

■ $\max \epsilon_{e,Z,U} = 0,005$ ▨ $\max \epsilon_{e,Z,U} = \epsilon_{s_s} = 0,002$

BSt 42/50 $\omega = F_e \cdot \beta_s / (b \cdot d \cdot \beta_R) = 0,40$

Traglasten für $\max \epsilon_{bd,U}^{(exz)} = -0,0035$ und $\max \epsilon_{eZ,U} = 0,002$, wie er mit den anfänglich beschriebenen Rechenprogrammen ermittelt worden ist.

Abbildung 29 zeigt für einen geringen Bewehrungsgehalt von $\omega = 0,10$, dem entspricht $\mu = 0,5^0/0$ bei einer mittleren Betongüte mit $R_R = 2100 \text{ Mp/m}^2$ als Maximalwert der Spannungen, daß Instabilitätsfälle nur dann für die Festlegung der Traglast maßgebend sind, wenn die Stabschlankheit $s/d \lesssim 10$ und gleichzeitig die planmäßige Lastausmitte $e/d \lesssim 0,25$ ist. Alle Instabilitätsfälle für größere Lastausmitten werden ausgeschaltet, wenn die Größtdehnung der Stahlzugbewehrung auf die Fließdehnung ϵ_s begrenzt wird.

Abbildung 28 gab größere Werte für die kritische Stabschlankheit für $\omega = 0,40$ gegenüber $\omega = 0,10$ nach Abbildung 27 an, der Bereich der Instabilitätsfälle nach Abbildung 30 für $\omega = 0,40$ ist dagegen für die kritische planmäßige Lastausmitte gegenüber $\omega = 0,10$ ebenfalls größer und nicht etwa wegen der Ausdehnung in größere s/d kleiner. Instabilitätsfälle bleiben auf $e/d \lesssim 0,25$ erst dann beschränkt, wenn gleichzeitig die Stabschlankheit $s/d \gtrsim 45$ ist. Für kleinere Stabschlankheiten erfolgt ein weiterer Einbruch dieses Bereiches, so daß Instabilitätsfälle bis zu $e/d \approx 0,70$ möglich sind. Erst für noch größere Lastausmitten ist mit $\max \epsilon_{eZ,U} = 0,002$ durchweg der Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts für die Traglast maßgebend.

Die Begrenzung der Betongrößtdehnung auf $\max \epsilon_{bd,U}^{(exz)} = -0,002$ würde für $\omega = 0,10$ die kritische Lastausmitte nicht noch weiter verringern, lediglich die kritische Stabschlankheit würde auf $s/d \approx 25$ anwachsen. Für $\omega = 0,40$ würde hingegen die Reduzierung der Betongrößtdehnung den Bereich für Instabilitätsfälle sehr stark verkleinern; Die kritische Lastausmitte würde durchweg auf $e/d \approx 0,20$ zurückgehen, gleichzeitig würde die kritische Stabschlankheit auf $s/d \gtrsim 30$ anwachsen.

Es war bereits festgestellt worden, daß eine Reduzierung des Größtwertes für die Stahlzugdehnung auf die Fließdehnung nur für $s/d \lesssim 15$ und dort auch nur unbedeutend die Größe der Traglast beeinflusst. Es muß noch untersucht werden, wie die Größe der Traglast von einer Verringerung der Betongrößtdehnung beeinflusst wird. Hierzu wurden für die beiden Bewehrungsanteile $\omega = 0,10$ und $\omega = 0,40$ die Traglasten mit $\max \epsilon_{bD,U}^{(exz)} = -0,002$ und $\max \epsilon_{eZ,U} = 0,002$ berechnet, in Abbildung 29 und 30 waren bereits die vergleichbaren Traglasten mit $\max \epsilon_{bD,U}^{(exz)} = -0,0035$ dargestellt. Um gleichzeitig auch einen Anhalt über die Auswirkung der vereinfachten Stahlarbeitslinie ideal-elastisch, ideal-plastisch wie für naturharten Stahl zu bekommen, wenn ein Übergangsbogen zwischen elastischem und plastischem Bereich wie etwa bei kaltverformten Stahl eingeschaltet wird, wurden zusätzlich auch die Traglasten mit $\max \epsilon_{bD,U}^{(exz)} = -0,0035$ und $\max \epsilon_{eZ,U} = 0,005$ (Übergangsbogen) berechnet. Die Vergleiche der Traglasten für diese drei Fälle sind in den Tafeln 2 und 3 zahlenmäßig aufgeführt.

Für kleine Schlankheiten, für die ausschließlich der Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts maßgebend ist, gibt die verringerte Betongrößtdehnung nennenswert kleinere Traglasten an. Der Hauptgrund hierfür ist die Tatsache, daß mit $\max \epsilon_{bD,U}^{(exz)} = -0,002$ nicht die volle Stahlfestigkeit in der Druckbewehrung ausgenutzt werden kann, wie dies bei $\max \epsilon_{bD,U}^{(exz)} = -0,0035$ der Fall ist. Erst von einer gewissen Stabschlankheit an geben beide unterschiedlichen Betongrößtdehnungen praktisch gleiche Traglasten, dann nämlich, wenn die Traglast im Zugbruchbereich liegt. Diese Grenzen für die Stabschlankheiten sind näherungsweise $s/d \lesssim 20$ für $\omega = 0,10$ und $s/d \lesssim 30$ für $\omega = 0,40$, mit diesen Werten gelten sie durchweg für alle planmäßigen Lastausmitten e/d , wie es auch aus den Abbildungen 29 und 30 hervorgeht.

Bezogene Lastausmitte e/d	Bezogene Stablänge s/d						
	0	10	20	30	40	50	60
0.05	1.052	0.979	0.797	0.561	0.366	0.247	0.171
	1.01	1.01	1.02	1.00	1.00	1.02	1.06
	0.96	0.98	1.01	1.00	1.01	1.02	1.06
0.10	0.942	0.860	0.677	0.446	0.283	0.185	0.123
	1.00	1.01	1.02	1.00	1.01	1.04	1.11
	0.93	0.96	1.00	1.00	1.01	1.04	1.11
0.20	0.751	0.668	0.483	0.293	0.180	0.118	0.082
	1.00	1.01	1.01	1.00	1.00	1.01	1.03
	0.90	0.94	0.99	1.00	1.00	1.01	1.03
0.30	0.600	0.524	0.362	0.221	0.141	0.095	0.069
	1.00	1.01	1.02	1.02	1.01	1.02	0.97
	0.87	0.91	0.99	1.03	1.01	1.02	0.97
0.40	0.487	0.414	0.276	0.175	0.118	0.083	0.062
	1.01	1.04	1.05	1.04	1.04	1.03	1.02
	0.84	0.90	1.03	1.05	1.04	1.03	1.02
0.50	0.389	0.321	0.215	0.144	0.101	0.074	0.056
	1.00	1.03	1.05	1.06	1.05	1.04	1.04
	0.86	0.96	1.05	1.06	1.05	1.04	1.04
0.75	0.214	0.181	0.134	0.099	0.075	0.058	0.046
	0.92	0.99	1.05	1.07	1.07	1.06	1.06
	0.92	0.99	1.05	1.07	1.07	1.06	1.06
1.00	0.135	0.120	0.096	0.076	0.060	0.049	0.039
	0.93	0.98	1.05	1.07	1.07	1.07	1.08
	0.94	0.98	1.04	1.07	1.07	1.07	1.08

Tafel 2

Bezogene Traglasten $n=N/(b \cdot d \cdot \beta_R)$ der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt ($h=0,9 \cdot d$; $h'=0,1 \cdot d$) für verschieden definierte Erschöpfungszustände.

BSt 42/50	$\omega = Fe \cdot \beta_S / (b \cdot d \cdot \beta_R) = 0,10$
-----------	--

Die Erschöpfungszustände zu den Zeilen 1 bis 3 sind definiert:

Zeile	$\epsilon_{bD,U}(exz)$	$\epsilon_{eZ,U}$		Tafelwert
1	-0,0035	0,005	kaltverformter Stahl	n als absoluter Wert
2	-0,0035	0,002	naturharter Stahl	n bezogen auf Zeile 1
3	-0,0020	0,002	naturharter Stahl	n bezogen auf Zeile 1

Bezogene Lastausmitte e/d	Bezogene Stablänge s/d						
	0	10	20	30	40	50	60
0.05	1.560	1.474	1.243	0.920	0.604	0.409	0.288
	1.02	1.04	1.05	1.02	1.00	1.00	1.02
	0.99	1.00	1.02	1.01	1.00	1.00	1.02
0.10	1.412	1.318	1.081	0.787	0.514	0.346	0.246
	1.01	1.02	1.05	1.02	1.00	1.00	1.01
	0.95	0.97	1.01	1.01	1.00	1.00	1.01
0.20	1.171	1.074	0.857	0.619	0.423	0.293	0.212
	1.01	1.02	1.04	1.03	1.01	1.00	1.00
	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00
0.30	0.978	0.897	0.715	0.523	0.371	0.263	0.195
	1.01	1.01	1.03	1.04	1.02	1.02	1.01
	0.89	0.91	0.95	0.98	1.00	1.01	1.01
0.40	0.837	0.769	0.619	0.460	0.331	0.240	0.181
	1.01	1.01	1.03	1.04	1.04	1.03	1.02
	0.86	0.88	0.93	0.97	1.00	1.02	1.02
0.50	0.730	0.671	0.546	0.409	0.299	0.220	0.169
	1.01	1.02	1.03	1.05	1.05	1.04	1.03
	0.85	0.87	0.91	0.96	1.01	1.04	1.03
0.75	0.547	0.507	0.413	0.316	0.239	0.184	0.145
	1.01	1.03	1.06	1.07	1.06	1.05	1.05
	0.83	0.85	0.91	0.98	1.04	1.05	1.04
1.00	0.426	0.393	0.324	0.255	0.200	0.159	0.128
	1.03	1.04	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06
	0.84	0.87	0.94	1.02	1.06	1.06	1.05
1.50	0.277	0.257	0.221	0.183	0.150	0.125	0.103
	0.97	1.00	1.03	1.05	1.06	1.07	1.07
	0.91	0.95	1.01	1.05	1.06	1.07	1.08

Tafel 3

Bezogene Traglasten $n = N/(b \cdot d \cdot \beta_R)$ der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt ($h=0,9 \cdot d$; $h'=0,1 \cdot d$) für verschieden definierte Erschöpfungszustände.

BSt 42/50	$\omega = Fe \cdot \beta_S / (b \cdot d \cdot \beta_R) = 0,40$
-----------	--

Die Erschöpfungszustände zu den Zeilen 1 bis 3 sind definiert:

Zeile	$\epsilon_{bD,U}(exz)$	$\epsilon_{eZ,U}$		Tafelwert
1	-0,0035	0,005	kaltverformter Stahl	n als absoluter Wert
2	-0,0035	0,002	naturharter Stahl	n bezogen auf Zeile 1
3	-0,0020	0,002	naturharter Stahl	n bezogen auf Zeile 1

Der Vergleich ergibt also, daß eine Ausweitung des Bereiches "Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts" durch Verringerung der Betongrößtdehnung nur bei gleichzeitiger nennenswerter Verringerung der Traglasten möglich ist, hiervon wird man aus wirtschaftlichen Gründen nur allzu gern Abstand nehmen. Denkbar ist allenfalls eine Beschränkung auf eine verringerte Druckdehnung in der Art, daß die Grenzdehnung nicht für den Betonrand, sondern für die Druckbewehrung eingehalten wird. Diese müßte ebenso wie für die Zugbewehrung mit ϵ_s festgelegt sein, um die volle Festigkeit ausnutzen zu können. Es ergäbe sich auf diese Weise insbesondere für stark bewehrte Querschnitte, daß die Traglast fast ausschließlich durch Erreichen der Fließdehnung in der Druck- oder Zugbewehrung festgelegt ist, ohne daß eine nennenswerte Verringerung in der Größe der Traglast durch diese Art der Grenzdehnungsfestlegung eintreten würde.

Der Vergleich der Traglasten, die für eine ideal-elastische, ideal-plastische Stahlarbeitslinie berechnet wurden, mit denen zu der allmählich in den plastischen Bereich übergehenden Arbeitslinie, zeigt, daß letztere um einige Prozente kleiner sind. Der Unterschied zwischen beiden Arbeitslinien liegt in der Größenordnung, die auch durch das Mitrechnen begrenzter Betonzugspannungen sich ergeben würde. Die Vereinfachung der Stahlarbeitslinie zu einer bilinearen Form, von der nur der vergrößerte elastische Bereich ausgenutzt wird, kompensiert das Nicht-in-Rechnung-Stellen von Betonzugspannungen.

4.4 Vereinfachung des Traglastproblems durch Festlegung eines ersatzweise geltenden einheitlichen Traglastkriteriums

Zur Frage, welche praktischen Vereinfachungen zur Vermeidung der Variation der oberen Integrationsgrenze, um dem Auftreten instabiler Gleichgewichtszustände Rechnung zu

tragen, möglich sind, kann als Ergebnis der bisherigen Untersuchungen gesagt werden:

- a) Eine Vereinfachung der Stahlarbeitslinie zu bilinearer Form ist möglich, hierdurch wird in gewissem Umfange das Nichtmitrechnen von Betonzugspannungen kompensiert.
- b) Bei Zugrundelegung einer bilinearen Stahlarbeitslinie kann der Erschöpfungszustand des Querschnitts durch Begrenzung der Stahlzugdehnung auf die Fließdehnung definiert werden. Das Traglastkriterium für die Mehrzahl der baupraktischen Fälle und insbesondere bei schwach bewehrten Querschnitten ist dann im Zugbruchbereich der Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts. Die Größe der Traglast bleibt im wesentlichen unbeeinflusst.
- c) Eine weitere Verkleinerung des Bereiches "Instabilität der Stütze" im Druckbruchbereich durch Verringerung der ausnutzbaren Betongrößtdehnung ergibt nennenswerte kleinere Traglasten und ist deshalb nicht zweckmäßig.

Die Variation der oberen Grenze bei der Integration der Differentialgleichung des ausmittig gedrückten Stabes, - Gleichung (4), - kann also durch Begrenzung der Stahlzugdehnung auf den elastischen Bereich im Zugbruchbereich vermieden werden. Um auch im Druckbruchbereich die Variation der oberen Integrationsgrenze zu vermeiden, sind zusätzliche Überlegungen anzustellen: um die Traglasten mit Rücksicht auf die Wirtschaftlichkeit der Bemessung nicht ungebührlich zu verringern, ist nach dem oben Gesagten als Betongrößtdehnung der Wert $\epsilon_{bD,U}^{(exz)} = -0,0035$ beizubehalten. Im Falle, daß der Traglastzustand durch das Erreichen eines instabilen Gleichgewichtszustandes festgelegt ist, ergibt die Integration dann die größte Stablänge s bzw. die größte planmäßige Lastausmitte e_e , wenn im Mittenquerschnitt eine Stabkrümmung kleiner als zum Erschöpfungszustand gehörig vorgegeben wird, wie dies in Abbildung 31 schematisch dargestellt ist,

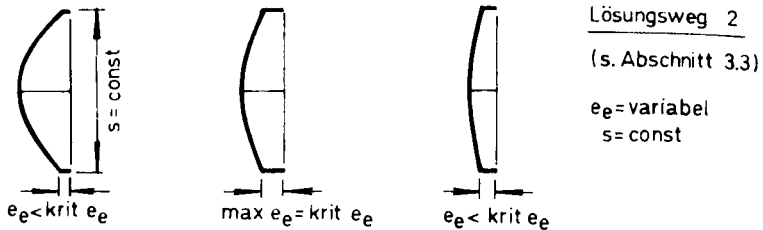
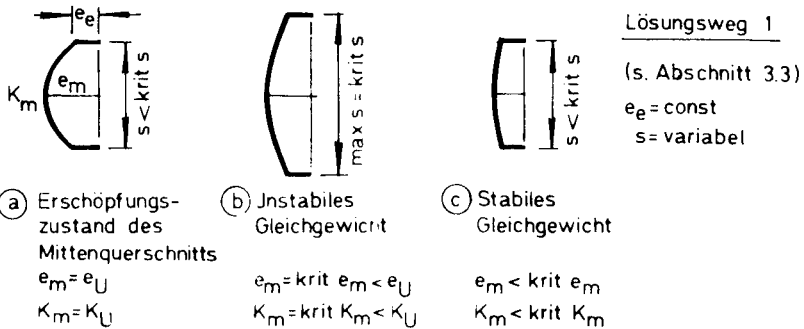


Abbildung 31 Variation der oberen Integrationsgrenze e_m zur Bestimmung der kritischen Werte $\text{krit } s$ oder $\text{krit } e_e$

Um die erforderliche Variation zur Bestimmung des kritischen Wertes zu vermeiden, könnte man sich vorstellen, daß man den bei Annahme des Erschöpfungszustandes im Mittenquerschnitt errechneten Wert s bzw. e_e mit einem vorläufig noch unbekannten Faktor multipliziert, damit er s_{krit} bzw. $e_{e,\text{krit}}$ zahlenmäßig entspricht.

Um diesen Korrekturfaktor F zu bestimmen, wurde eine entsprechende Untersuchung für Lösungsweg 1 durchgeführt. Analog zu Gleichung (22) wurde gesetzt:

$$(90) \quad e_U = \frac{s_{\text{krit}}^2}{F} \cdot K_U + e_e .$$

Mit den vorhandenen Rechenprogrammen wurden die Werte s_{krit} und gleichzeitig der Faktor F bestimmt. Das Ergebnis ist für zwei Stahlsorten (BSt 24/34 mit $\beta_s = 24\,000\text{ Mp/m}^2$ und BSt 42/50 mit $\beta_s = 42\,000\text{ Mp/m}^2$) und jeweils 4 verschiedene mechanische Bewehrungsgehalte $\omega = 0,042-0,105-0,210$ und $0,420$ in den Abbildungen 32 und 33 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß weder die Stahlfestigkeit noch der Bewehrungsgehalt einen wesentlichen Einfluß auf die Größe des Faktors F haben; der Verlauf von F in Abhängigkeit von der bezogenen planmäßigen Lastausmitte e_e/d und der bezogenen Stablänge s/d ist in allen Diagrammen nahezu gleich. Die Veränderlichkeit von F mit s/d ist für größere Lastausmitten als $e/d = 0,75$ nahezu unbedeutend, so daß sich eine einfache Beziehung zwischen F und e_e/d angeben läßt. Um den baupraktisch wichtigsten Bereich bis $s/d = 30$ hinsichtlich der Traglast möglichst gut zu erfassen, wurde folgende Gleichung für F ermittelt:

$$(91) \quad F = \frac{18,5}{1 + 1,39 \cdot \sqrt[3]{e_e/d}} > 8,2$$

Gleichung (90) und (91) sind die Lösung für eine weitgehende Vereinfachung des Traglastproblems der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze in zweifacher Hinsicht: Die Integration der Differentialgleichung, - Gleichung (1), - für eine nicht-lineare Moment-Krümmungsbeziehung, die nur numerisch durchführbar ist, wird auf eine einfache Beziehung zwischen Stabverformung, Stabkrümmung im Erschöpfungszustand des Mittenquerschnitts und Stablänge zurückgeführt, und zum anderen ist die Optimierung der errechneten Freigröße, die sonst durch Variation der Integrationsgrenze verwirklicht werden müßte, miteingeschlossen.

Die rechnerische Lösung des Traglastproblems kann dann folgendes Aussehen haben: Zu einem vorgegebenen Grenzdehnungszustand oder Erschöpfungszustand werden die inneren Schnittgrößen N_U und M_U oder auch N_U und $e_U = M_U/N_U$ be-

stimmt; N_U ist Traglast, wenn Gleichung (90) erfüllt ist. Durch Veränderung des Grenzdehnungszustandes wird die Traglast iterativ angesteuert.

In den Tafeln 4 bis 7 werden die mit den Vereinfachungen der Gleichungen (90) und (91) errechneten Traglasten den exakten Werten, die programmgesteuert bestimmt wurden, gegenübergestellt. Zur besseren Veranschaulichung des Ergebnisses in den Tafeln 4 und 5 dienen die diesen Tafeln entsprechenden Darstellungen der Abbildungen 34 und 35. Für die schwach bewehrte Stütze mit $\omega = 0,10$ sind die Abweichungen für kleine Lastausmitten bis $e/d = 0,10$ größer als bei der stark bewehrten Stütze mit $\omega = 0,40$. Ab $e/d = 0,20$ verbleiben für beide untersuchten Bewehrungsgehalte die Abweichungen im baupraktischen Bereich innerhalb von $\pm 5\%$. Die geringen Abweichungen lassen die Verwendung dieser Vereinfachung für ein praktisches Bemessungsverfahren geeignet erscheinen. Hierzu wurde vom Verfasser in eigenen Arbeiten berichtet [11, 12]. In [12] wurde über eine noch weitergehende Vereinfachung berichtet, die einen Vorschlag von Aas-Jakobsen aufgreift, den Zusammenhang der Schnittgrößen N_U und M_U sowie der Stabkrümmungen K_U im Erschöpfungszustand durch lineare Beziehungen anzunähern. Für mathematisch einfache Zusammenhänge zwischen Schnittgrößen und Krümmung läßt sich dann Gleichung (90) explizit nach einer Freigröße auflösen. In [12] wurde eine Bemessungsformel für die ausmittig gedrückte Stütze mit beliebig bewehrtem Rechteckquerschnitt entwickelt; die die erforderliche Bewehrung direkt zu errechnen gestattet.

Das Ergebnis der Nachrechnung von Stützenversuchen mit den Gleichungen (90) und (91) ist ebenfalls gut, wichtig ist vor allem, daß der Variationskoeffizient in der gleichen Größenordnung bleibt, wie sie für exakte programmgesteuerte Berechnungen gilt. Über diese Nachrechnungen wurde in [11] ausführlicher berichtet, hier wird nur das Endergebnis in Abbildung 36 mitgeteilt.

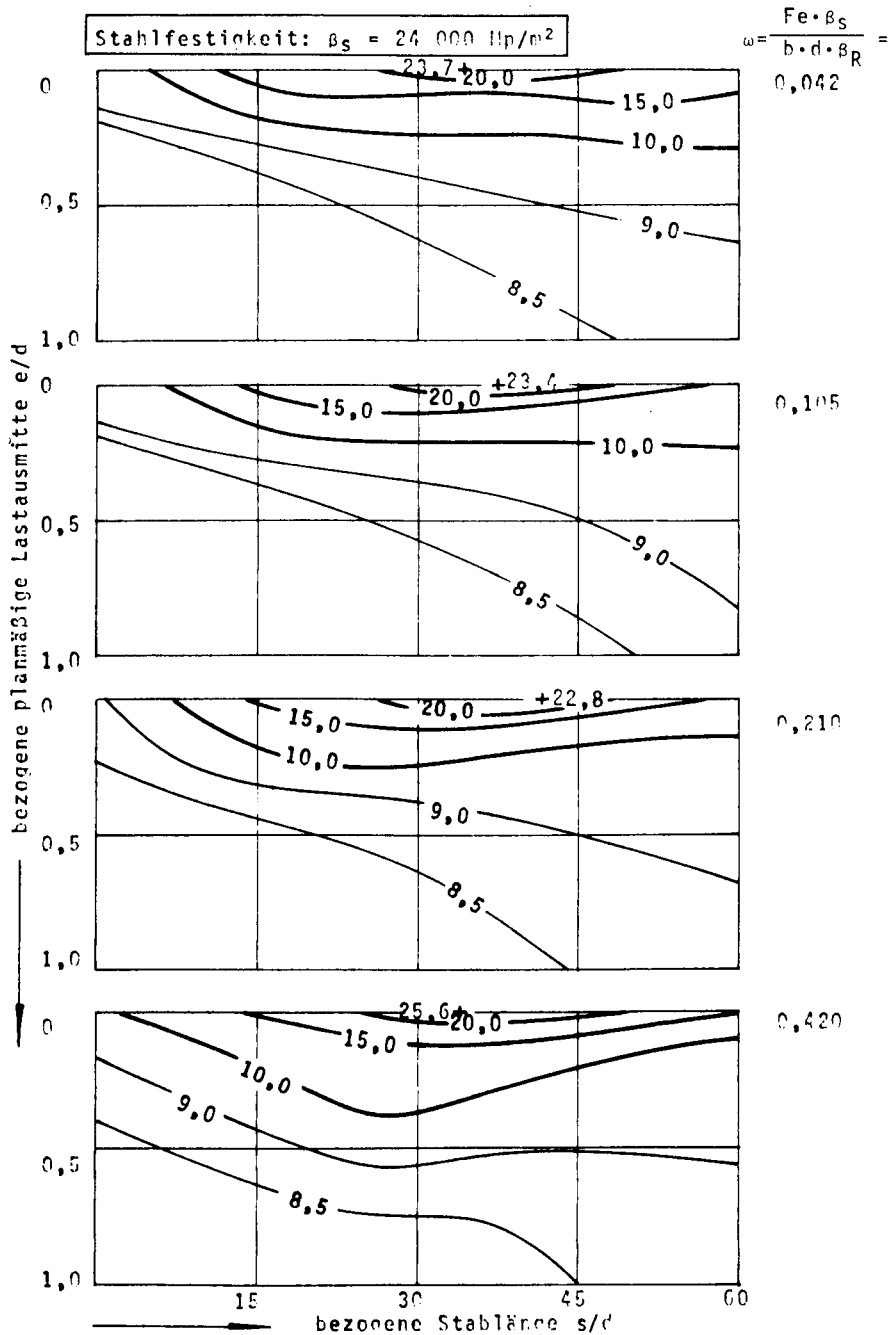


Abbildung 32 Größe des Faktors F in Gleichung (90)

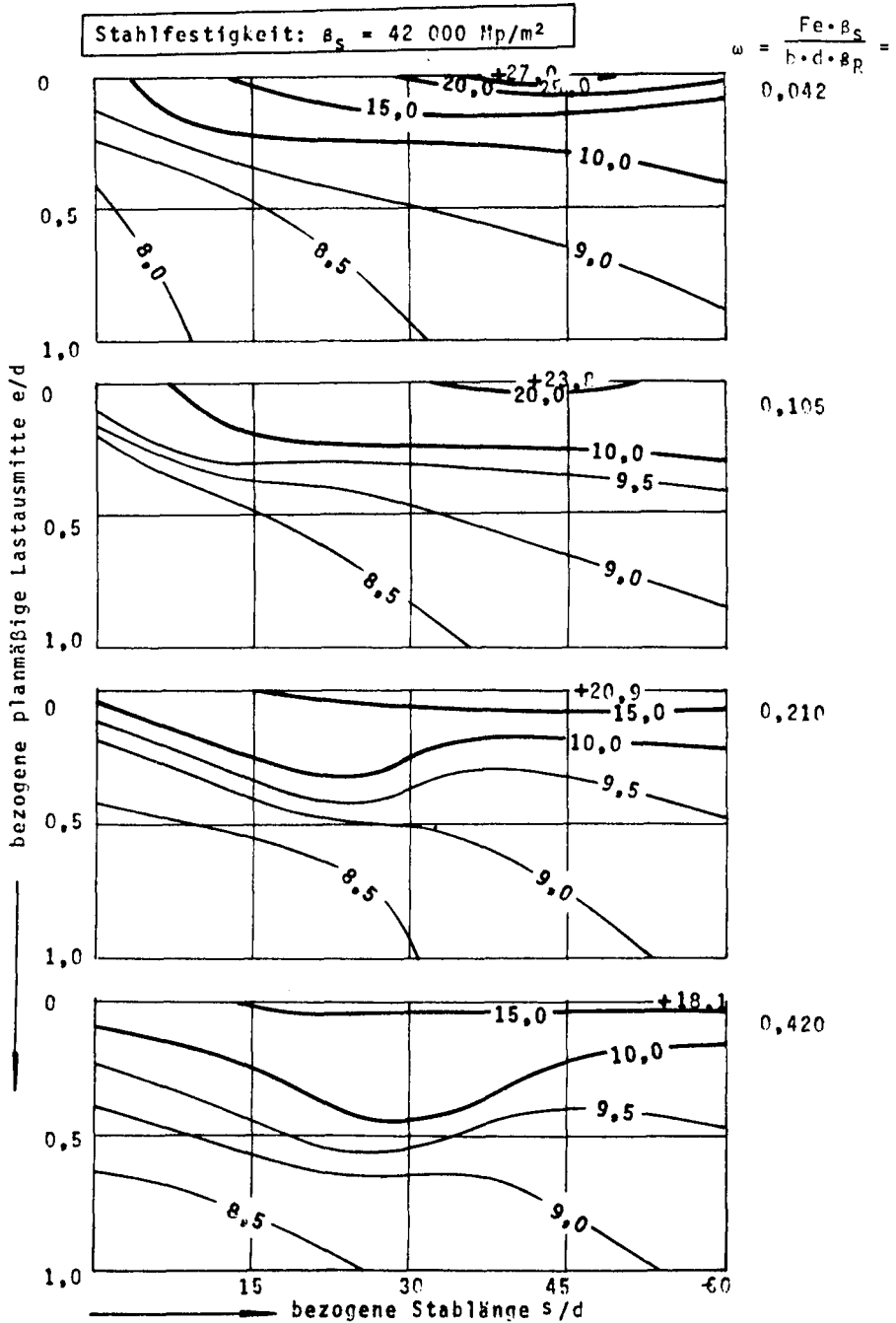


Abbildung 33 Größe des Faktors F in Gleichung (90)

Bezogene Lastausmitte e/d	Bezogene Stablänge s/d						
	0	10	20	30	40	50	60
0.05	1.058	0.993	0.810	0.560	0.367	0.252	0.182
	1.00	1.01	0.97	0.76	0.73	0.65	0.59
0.10	0.945	0.869	0.687	0.446	0.285	0.192	0.137
	1.00	1.01	0.93	0.85	0.79	0.72	0.69
0.20	0.753	0.674	0.490	0.293	0.180	0.120	0.085
	1.00	1.01	0.94	0.99	0.96	0.93	0.91
0.30	0.602	0.531	0.371	0.226	0.143	0.097	0.067
	1.00	1.01	1.02	1.00	0.99	0.98	1.00
0.40	0.493	0.429	0.289	0.183	0.122	0.086	0.063
	1.00	1.00	1.01	0.99	0.97	0.95	0.94
0.50	0.389	0.330	0.225	0.153	0.106	0.077	0.058
	1.00	1.00	1.01	0.99	0.96	0.94	0.93
0.75	0.197	0.178	0.141	0.106	0.081	0.062	0.049
	1.00	1.00	0.99	0.97	0.95	0.92	0.91
1.00	0.125	0.118	0.100	0.081	0.065	0.052	0.042
	1.00	1.00	0.99	0.98	0.96	0.95	0.95

Tafel 4

Bezogene Traglasten $n = N/(b \cdot d \cdot \beta_R)$ der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt ($h=0,9 \cdot d$; $h'=0,1 \cdot d$).

BSt 42/50	$\omega = F_e \cdot \beta_S / (b \cdot d \cdot \beta_R) = 0,10$
-----------	---

In der oberen Zeile stehen die exakten, programmgesteuert errechneten Traglasten mit $\epsilon_{bd, U}(exz) = -0,0035$ und $\epsilon_{eZ, U} = \epsilon_s = 0,002$ (naturharter Stahl) als Grenzdehnungen; darunter stehen die auf diese Traglasten bezogenen Werte der Näherungslösung nach Gleichung (90) und (91).

Bezogene Lastausmitte e/d	Bezogene Stablänge s/d						
	0	10	20	30	40	50	60
0.05	1.596	1.528	1.309	0.936	0.605	0.411	0.294
	1.00	1.00	0.96	0.90	0.86	0.95	0.96
0.10	1.430	1.349	1.133	0.803	0.514	0.347	0.248
	1.00	1.00	0.96	0.90	0.89	1.02	1.02
0.20	1.177	1.094	0.893	0.639	0.426	0.293	0.212
	1.00	1.00	0.97	0.92	0.97	1.03	1.02
0.30	0.986	0.910	0.738	0.542	0.378	0.268	0.197
	1.00	1.00	0.98	0.92	0.99	0.99	0.98
0.40	0.843	0.779	0.635	0.476	0.343	0.247	0.185
	1.00	1.00	0.98	0.94	0.98	0.97	0.96
0.50	0.734	0.681	0.560	0.428	0.313	0.228	0.174
	1.00	1.00	0.98	0.96	0.96	0.95	0.94
0.75	0.555	0.520	0.437	0.338	0.253	0.194	0.153
	1.00	1.00	0.98	0.97	0.95	0.93	0.90
1.00	0.440	0.410	0.344	0.270	0.212	0.169	0.136
	1.00	1.00	0.99	0.98	0.96	0.94	0.92
1.50	0.268	0.256	0.227	0.192	0.160	0.133	0.110
	1.00	1.00	0.99	0.99	0.98	0.96	0.96

Tafel 5

Bezogene Traglasten $n = N/(b \cdot d \cdot \beta_R)$ der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt ($h=0,9 \cdot d$; $h'=0,1 \cdot d$).

BSt 42/50	$\omega = Fe \cdot \beta_S / (b \cdot d \cdot \beta_R) = 0,40$
-----------	--

In der oberen Zeile stehen die exakten, programmgesteuert errechneten Traglasten mit $\epsilon_{b0,U}(exz) = -0,0035$ und $\epsilon_{sz,U} = \epsilon_s = 0,002$ (naturharter Stahl) als Grenzdehnungen; darunter stehen die auf diese Traglasten bezogenen Werte der Näherungslösung nach Gleichung (90) und (91).

Bezogene Lastausmitte e/d	Bezogene Stablänge s/d						
	0	10	20	30	40	50	60
0.05	1.052	0.979	0.797	0.561	0.366	0.247	0.171
	1.01	1.02	0.98	0.76	0.73	0.66	0.63
0.10	0.942	0.860	0.677	0.446	0.283	0.185	0.123
	1.00	1.02	0.94	0.85	0.80	0.76	0.76
0.20	0.751	0.668	0.483	0.293	0.180	0.118	0.082
	1.00	1.02	0.95	0.99	0.96	0.94	0.93
0.30	0.600	0.524	0.362	0.221	0.141	0.095	0.069
	1.00	1.02	1.04	1.02	1.00	0.99	0.97
0.40	0.487	0.414	0.276	0.175	0.118	0.083	0.062
	1.01	1.04	1.05	1.03	1.01	0.98	0.96
0.50	0.389	0.321	0.215	0.144	0.101	0.074	0.056
	1.00	1.03	1.05	1.04	1.01	0.98	0.96
0.75	0.214	0.181	0.134	0.099	0.075	0.058	0.046
	0.92	0.99	1.04	1.04	1.01	0.98	0.97
1.00	0.135	0.120	0.096	0.076	0.060	0.049	0.039
	0.93	0.98	1.04	1.05	1.03	1.02	1.02

Tafel 6

Bezogene Traglasten $n = N/(b \cdot d \cdot B_R)$ der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt ($h=0,9 \cdot d$; $h'=0,1 \cdot d$).

BSt 42/50	$\omega = F_e \cdot B_R / (b \cdot d \cdot B_R) = 0,10$
-----------	---

In der oberen Zeile stehen die exakten, programmgesteuert errechneten Traglasten mit $\epsilon_{BD,U}(exz) = -0,0035$ und $\epsilon_{eZ,U} = 0,005$ (kaltverformter Stahl) als Grenzdehnungen; darunter stehen die auf diese Traglasten bezogenen Werte der Näherungslösung nach Gleichung (90) und (91).

Bezogene Lastausmitte e/d	Bezogene Stablänge s/d						
	0	10	20	30	40	50	60
0.05	1.560	1.474	1.243	0.920	0.604	0.409	0.288
	1.02	1.04	1.01	0.92	0.86	0.95	0.98
0.10	1.412	1.318	1.081	0.787	0.514	0.346	0.246
	1.01	1.03	1.01	0.92	0.89	1.02	1.03
0.20	1.171	1.074	0.857	0.619	0.423	0.293	0.212
	1.01	1.02	1.01	0.94	0.98	1.03	1.02
0.30	0.978	0.897	0.715	0.523	0.371	0.263	0.195
	1.01	1.02	1.01	0.96	1.01	1.01	0.99
0.40	0.837	0.769	0.619	0.460	0.331	0.240	0.181
	1.01	1.01	1.00	0.98	1.01	1.00	0.98
0.50	0.730	0.671	0.546	0.409	0.299	0.220	0.169
	1.01	1.02	1.00	1.01	1.01	0.99	0.97
0.75	0.547	0.507	0.413	0.316	0.239	0.184	0.145
	1.01	1.02	1.04	1.03	1.00	0.98	0.95
1.00	0.426	0.393	0.324	0.255	0.200	0.159	0.128
	1.03	1.04	1.05	1.04	1.02	1.00	0.97
1.50	0.277	0.257	0.221	0.183	0.150	0.125	0.103
	0.97	1.00	1.02	1.04	1.04	1.03	1.02

Tafel 7

Bezogene Traglasten $n = N/(b \cdot d \cdot \beta_R)$ der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt ($h=0,9 \cdot d$; $h'=0,1 \cdot d$).

BSt 42/50	$\omega = Fe \cdot \beta_S / (b \cdot d \cdot \beta_R) = 0,40$
-----------	--

In der oberen Zeile stehen die exakten, programmgesteuert errechneten Traglasten mit $\epsilon_{bD,U}(exz) = -0,0035$ und $\epsilon_{e2,U} = 0,005$ (kaltverformter Stahl) als Grenzdehnungen; darunter stehen die auf diese Traglasten bezogenen Werte der Näherungslösung nach Gleichung (90) und (91).

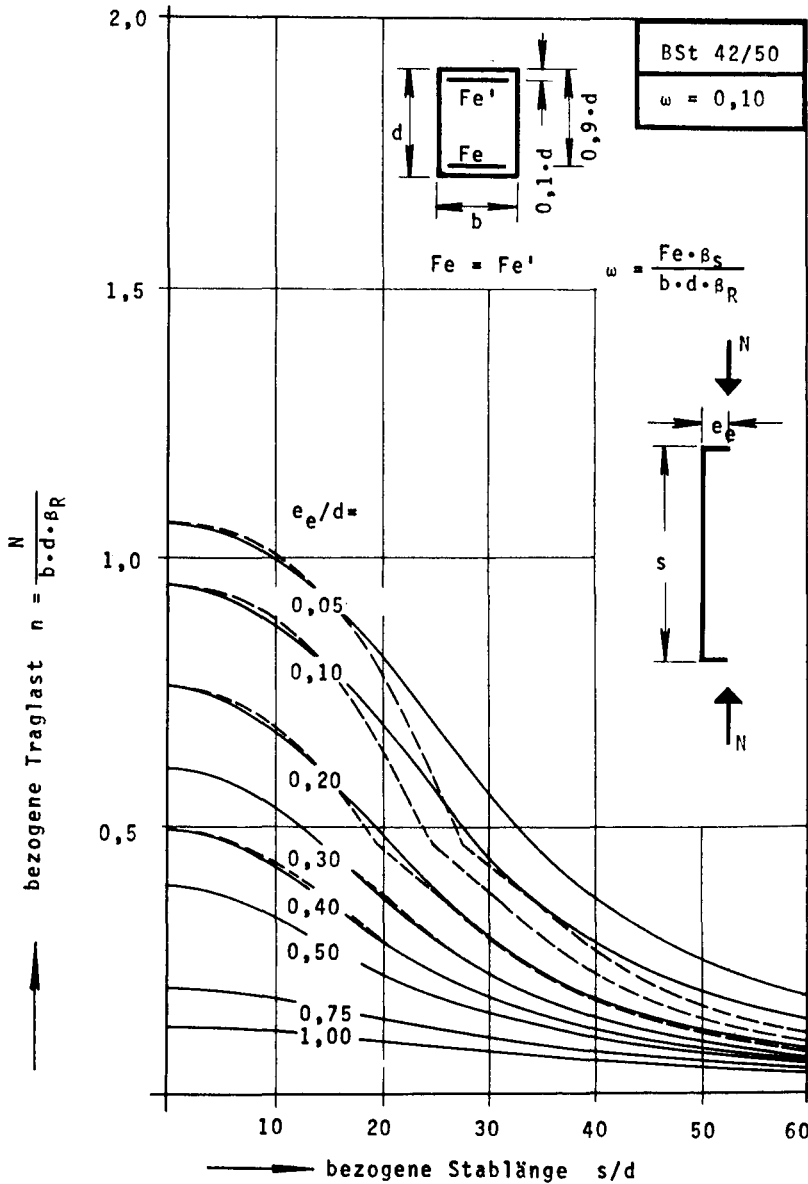


Abbildung 34

Bezogene Traglasten $n = N/(b \cdot d \cdot \beta_R)$ der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt.
 Grenzdehnungen: $\epsilon_{bD,U} = -0,0035$; $\epsilon_{eZ,U} = \epsilon_s = 0,002$

————— exakte Lösung
 - - - - - Näherungslösung nach Gleichung (90) und (91)

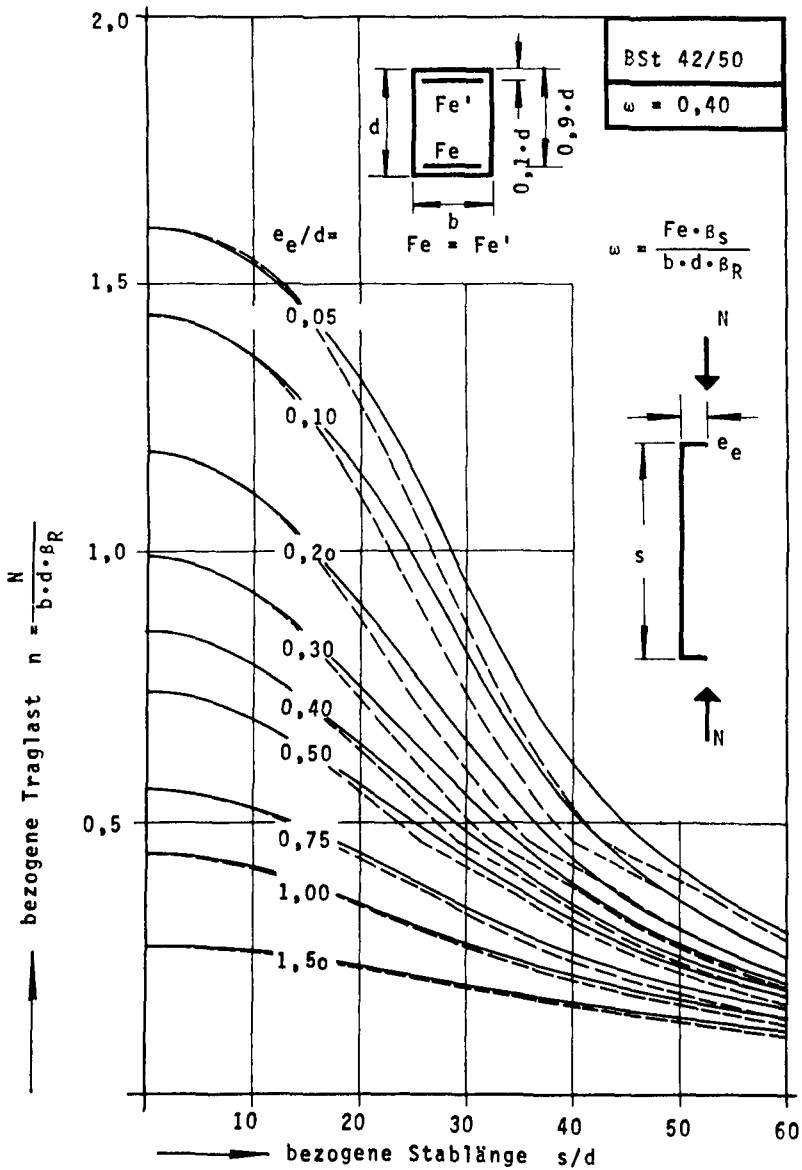


Abbildung 35

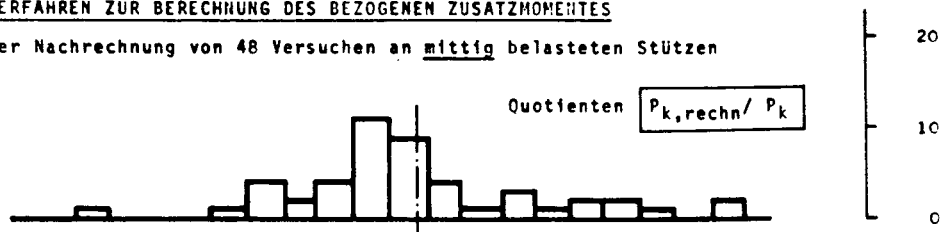
Bezugene Traglasten $n = N/(b \cdot d \cdot \beta_R)$ der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit symmetrisch bewehrtem Rechteckquerschnitt.
Grenzdehnungen: $\epsilon_{bD,U}^{(exz)} = -0.0035$; $\epsilon_{eZ,U} = \epsilon_s = 0.002$

— exakte Lösung

- - - Näherungslösung nach Gleichung (90) und (91)

NAHERUNGSVERFAHREN ZUR BERECHNUNG DES BEZOGENEN ZUSATZMOMENTES

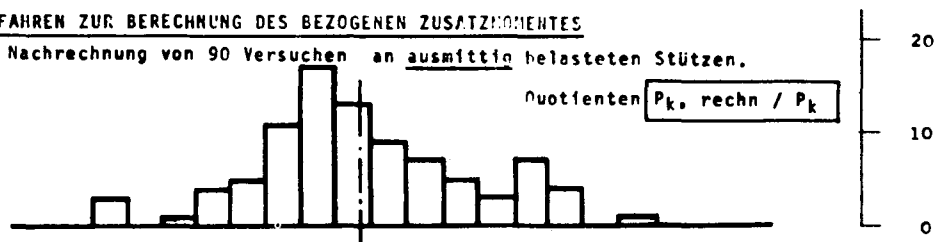
Ergebnis der Nachrechnung von 48 Versuchen an mittig belasteten Stützen



	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3		ANZAHL DER VERSUCHE	MITTEL- WERT	VARIATIONS- KOEFFIZIENT				
BAUMANN 1930-33				2	2	3	2	1			10	0,866	0,089				
THOMAS 1938						1		2	1		4	1,065	0,087				
GEHLER, HÜTTER 1940-42					1	3	2		1	1	8	0,946	0,124				
HANSON, ROSEN- STRÖM 1945-46				1		1		1			3	0,858	0,156				
RAMBOLL 1949-50	1			1	3		1	1			7	0,719	0,188				
GEHLER, HÜTTER 1950-51					1	3	2	2		1	12	1,010	0,175				
HROMADIK, RIVE- LAND 1952						1		1		1	4	1,140	0,200				
SUMME ALLER VERSUCHE	1			1	4	2	4	11	9	4	1	3	1	2	48	0,933	0,182

NÄHERUNGSVERFAHREN ZUR BERECHNUNG DES BEZOGENEN ZUSATZMOMENTES

Ergebnis der Nachrechnung von 90 Versuchen an ausmittig belasteten Stützen.



	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	ANZAHL DER VERSUCHE	MITTEL- WERT	VARIATIONS- KOEFFIZIENT					
BAUMANN 1930-33		1	1	1	2	3	1		1	1	1	1	13	0,949	0,190		
THOMAS 1930	3			2	2			1		2			10	0,827	0,289		
HANSON, ROSENSTRÖM 1945-46			1		1	1							3	0,818	0,081		
RAMBOLL 1945-50				1	6	3	2	4	1	2			19	0,967	0,115		
GEHLER, HÜTTER 1950-51			1	2	7	6	5	3					24	0,869	0,078		
GAEDE 1954						2	3	1	2				8	1,092	0,060		
HROMADIK, RIVE- LAND 1957			1			1	3		1		1		7	0,991	0,149		
KORDINA, DÜHNER 1965-66					2	1				3			6	1,056	0,178		
SUMME ALLER VERSUCHE	3	1	4	5	11	17	13	9	7	5	3	7	4	1	90	0,937	0,164

Abbildung 36

Ergebnis der Nachrechnung von Stützenversuchen
nach der vereinfachten Näherungslösung mit
Gleichung (90) und (91).

5. Der frei drehbare, unverschiebliche Stab mit ungleichen Lastausmitten an den Stabenden

5.1 Die Methode der Ersatzlastausmitte

Alle Untersuchungen zu Vereinfachungsmöglichkeiten des Traglastproblems der ausmittig belasteten Stahlbetonstütze in den Abschnitten 4.1 bis 4.4 bezogen sich auf die Stütze miteinander gleich großen Lastausmitten an beiden Stabenden, die nur ein Sonderfall der tatsächlich mit ungleichen Lastausmitten beanspruchten Stütze in üblichen Hochbaukonstruktionen sein kann.

In bisherigen Arbeiten [13], mehr noch in Kommentaren zu Bemessungsvorschriften [14, 15], wird die Bemessung des mit ungleichen Endausmitten beanspruchten Stabes auf die Bemessung des mit gleich großen Endausmitten beanspruchten Stabes zurückgeführt. In allen Fällen wird für die Bemessung als maßgebend eine Ersatzausmitte aus den beiden ungleichen Endausmitten abgeleitet.

In [13] wird für das Ersatzmoment gesetzt:

$$(92) \quad \text{ers } M^2 = 0,3 \cdot (M_0^2 + M_S^2) + 0,4 M_0 \cdot M_S.$$

Der Verlauf des Quotienten $\text{ers } M/M_S$ in Abhängigkeit von M_0/M_S ist in Abbildung 37 dargestellt.

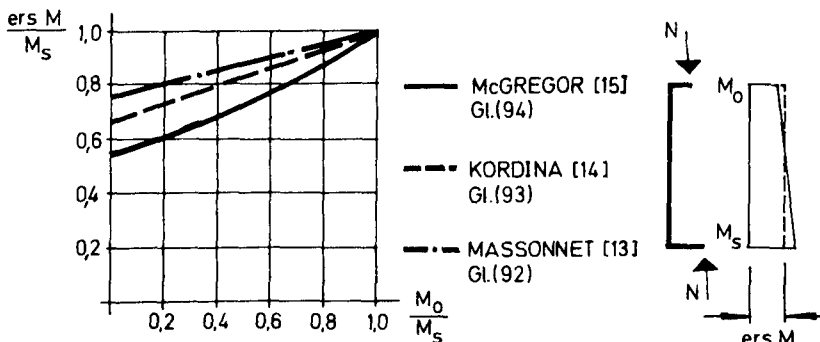


Abbildung 37 Ersatzmoment des mit ungleichen Endausmitten beanspruchten Druckstabes

Die auf KORDINA zurückgehende Formulierung der deutschen Vorschrift in [14], daß für den Knicksicherheitsnachweis vom Größtmoment im mittleren Drittel der Knicklänge auszugehen ist, kann als Gleichung geschrieben werden:

$$(93) \quad \text{ers } M = \frac{2}{3} M_S + \frac{1}{3} M_0.$$

Der Vorschlag von MCGREGOR in [15] stellt eine bewußt grobe Annäherung an den Vorschlag MASSONET dar, ist aber durch Nachrechnung einer begrenzten Anzahl von Stützenversuchen gut belegt und lautet:

$$(94) \quad \text{ers } M = \frac{3}{4} M_S + \frac{1}{4} M_0.$$

Welche von den Gleichungen (92) bis (94) auf Stahlbetonstützen in statisch unbestimmten Hochbaukonstruktionen angewendet, die der Wirklichkeit am besten entsprechenden Ergebnisse liefert, kann nicht entschieden werden, da weder genügend Versuche hierzu vorliegen, noch theoretische Untersuchungen hierüber abgeschlossen sind. Es kann aber gesagt werden, daß die Methode des Ersatzmomentes vom Prinzip her geeignet sein kann, die Bemessung in einer Art durchzuführen, die dem tatsächlichen Tragverhalten der ungleich ausmittig gedrückten Stütze entspricht.

Der Traglastabfall einer planmäßig gleich ausmittig beanspruchten Stütze beginnt mit der endlich kleinen Stablänge $s \rightarrow 0$, weil in jedem Falle die planmäßige Lastausmitte durch die Stabverformung vergrößert wird und die größte Lastausmitte daher stets größer als die Lastausmitte an den Stabenden ist. Dieser Sachverhalt mit gleicher Bewehrung in allen Schnitten erst ab einer gewissen Grenzlänge $\text{grenz } s$ zu, wie es in [1, 16, 17, 18] und [19] ausführlich erläutert ist. Der zahlenmäßige Wert für $\text{grenz } s$ hängt stark von der planmäßigen Lastausmitte und dem Verhältnis der Lastausmitten an beiden Stabenden ab. Zur Verdeutlichung diene die Abbildung 38.

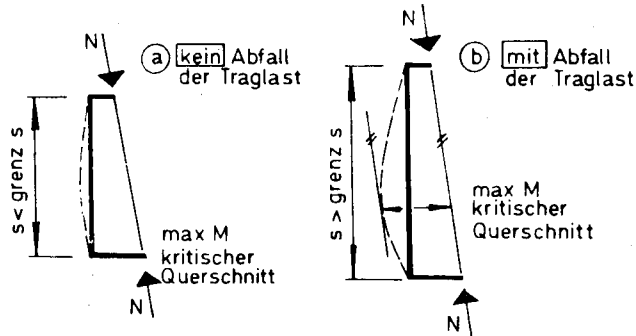


Abbildung 38 Kritischer Zustand der mit ungleichen Endausmitten gedrückten Stütze

5.2 Ersatzstab für die Stiele eines unverschieblichen Rahmens

Der in Abbildung 38a) dargestellte Sachverhalt, wonach die Stabverformung nicht zu einer Vergrößerung der Lastausmitte gegenüber der planmäßigen Endausmitte führt und deshalb auch keine Traglastminderung eintritt, kann mehr oder weniger gut durch die Methode des Ersatzmomentes berücksichtigt werden, wie es beispielsweise aus Beispiel 2, Abschnitt 2.3.1 in [14] hervorgeht. Insofern erscheint diese Methode zweckmäßig zu sein.

Unzweckmäßig an dieser Methode kann sein, daß die Stablänge s der theoretischen Knicklänge nach der Elastizitätstheorie entsprechen soll, wie es KORDINA im Hinblick auf die Grundlagen von DIN 1045, alt, verlangt. So angewendet kann die Methode des Ersatzmomentes in bestimmten Fällen vom Prinzip her falsche Ergebnisse liefern, weil das typische Auftreten der Traglastminderung nicht auf $s > \text{grenz } s$ beschränkt bleibt, sondern bereits auch für $s < \text{grenz } s$ herabgesetzte Traglasten ergibt. Dies soll an Abbildung 39 verdeutlicht werden.

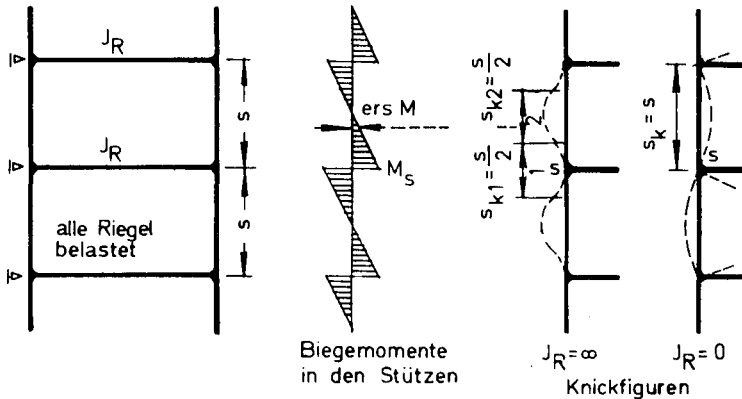


Abbildung 39 Biegemomente und Knickfiguren für die Stützen eines unverschieblichen Rahmens

Der Nachweis für die Stützen des dargestellten unverschieblichen Rahmens würde für den Fall $J_R \rightarrow 0$ entsprechend dem bereits oben genannten Beispiel 2, Abschn. 2.3.1 in [14] verlaufen: Die Traglast der Stütze ist durch den kritischen Querschnitt s festgelegt, der durch das Biegemoment M_s beansprucht ist. Der Knicksicherheitsnachweis mit $\text{ers } M$, das als konstant über die ganze Stablänge angesehen wird, ergibt keine größere Beanspruchung, solange $s < \text{grenz } s$ ist. Anders hingegen verläuft der Nachweis für den Fall $J_R \rightarrow \infty$. Mit $J_R < \infty$ wird $s \sim \frac{s}{2}$. Aber so lange M_s im mittleren Drittel von s_{k1} verbleibt, ergibt sich bereits für s wenig größer als Null ein Traglastfall, was zweifellos unvereinbar ist mit dem typischen Tragverhalten der ungleich ausmittig belasteten Stützen, wonach ein Traglastabfall erst für $s > \text{grenz } s$ eintritt. Dieser Widerspruch ergibt sich zweifellos dadurch, daß für den Knicksicherheitsnachweis die Stablänge gleich der theoretischen Knicklänge s_k gesetzt werden soll, er träte beispielsweise nicht auf, wenn die Stablänge immer gleich der Stockwerkshöhe s gesetzt wird.

Die in Abbildung 39 dargestellten Knickfiguren entsprechen den Stabverformungen im Knickzustand, wenn alle Lasten ausschließlich als Knotenlasten wirken, sie entsprechen jedoch keineswegs den Stabverformungen im Traglastzustand, wenn die Knotendrehungen durch die Riegelbelastung erzwungen sind. Die Bestimmung der theoretischen Knicklänge ist außerdem auch nur in den verhältnismäßig einfachen Fällen überhaupt praktisch möglich. Es ergibt sich deshalb die Frage, ob es bei dem umwegigen Verfahren für die Bemessung der beliebig ausmittig gedrückten Stütze bleiben soll, wonach zunächst eine Ersatzstablänge festzulegen ist, für die die keineswegs immer zweckmäßige theoretische Knicklänge vorgesehen ist und dann eine einfach zu bestimmende, aber vielleicht recht grobe Ersatzlastausmitte eingeführt wird.

Das Traglastproblem der ausmittig gedrückten Stütze mit einander gleich großen Lastausmitten an den Stabenden war dadurch weitgehend vereinfacht worden, daß der Verformungszustand unter Traglast mit vereinfachten Ansätzen berechnet werden konnte. Mit denselben Vereinfachungen soll nun auch das Traglastproblem der beliebig ausmittig belasteten Stahlbetonstütze näherungsweise gelöst werden.

Die Mehrzahl aller Stützen sind Stiele in statisch mehrfach unbestimmten Rahmensystemen. Die Lastausmitten in diesen Stützen - sofern sie überhaupt als ausmittig beanspruchte Bauteile bemessen werden - ergeben sich auf Grund einer statischen Berechnung des Systems, die die Verträglichkeitsbedingungen für die Verformungen zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Es ist gebräuchlich, diese Rechnung für Gebrauchslasten durchzuführen. Auch wenn die Bemessung der einzelnen Querschnitte als Bruchsicherheitsnachweis durchgeführt wird, so werden doch dieser Bemessung die Schnittgrößen auf Grund der Berechnung unter Gebrauchslast zugrunde gelegt. Für die Bemessung der Stützen im besonderen ist ebenfalls von der Erfüllung der Verträglichkeit für die Verformungen unter

Gebrauchslast auszugehen und dann für die sich hieraus ergebende Verteilung der Schnittgrößen die Bruchsicherheit der Stütze nachzuweisen, wofür die Traglast der Stütze maßgebend ist. Das Tragverhalten der Stützen in unverschieblichen Rahmen wird auf diese Weise dem Tragverhalten einer unverschieblich, frei drehbar gelagerten Stütze gleichgesetzt, die an ihren Enden planmäßig ausmittig belastet ist.

Auf den ersten Blick erscheint dieses Vorgehen deshalb zweifelhaft zu sein, weil es einer möglichen anders gearteten Schnittgrößenverteilung mit Annäherung an den Traglastzustand des Gesamtsystems nicht Rechnung trägt, die dadurch bedingt sein kann, daß sich die Steifigkeitsverhältnisse im Gesamtsystem mit Annäherung an den Traglastzustand sehr stark ändern und sich wesentlich von den Verhältnissen unter Gebrauchslast unterscheiden könnten. Vereinfacht läßt sich hierzu aber sagen, daß eine Schnittgrößenumlagerung nur dann eintritt, wenn einzelne Querschnitte zusätzliche Schnittgrößen aufnehmen können. Bei einer Bemessung aller Querschnitte mit gleicher Sicherheit gegen Erreichen des Bruches ist dies folglich weitgehend ausgeschlossen. Insofern ist also das oben beschriebene Betrachten der Stütze, losgelöst von den anschließenden Bauteilen, mit den grundsätzlichen Erfordernissen der Mechanik vereinbar.

Mit der Voraussetzung, daß die Traglast des Stieles eines unverschieblichen Rahmens als Traglast der unverschieblich, frei drehbar gelagerten Stütze mit gleichem Verlauf der planmäßigen Lastausmitten bestimmt werden kann, ist bereits eine ganz wesentliche Vereinfachung des Problems erzielt worden. In [1] und [17] sind die Traglasten ungleich ausmittig belasteter Stützen für einige wenige Fälle angegeben, wie sie sich auf Grund einer numerischen Integration der Differentialgleichung (1) programmgesteuert ergeben.

Je nach Lastanordnung auf den Riegeln ist die Verformung der Stiele durch einen einfach- oder doppeltgekrümmten Verlauf gekennzeichnet. Zum einfach gekrümmten Verlauf gehören eine Normalkraft und Biegemomente, die kleiner als die möglichen Größtwerte sind, wohingegen für den doppelt gekrümmten Verlauf Normalkraft und Biegemoment ihren Größtwert erreichen. Im ersten Falle tritt im verformten Zustand normalerweise ein gegenüber dem Endmoment M_s größeres Moment im Mittenbereich der Stütze auf, was im zweiten Falle selten ist. Welcher der beiden Fälle die kleinste Traglast ergibt, hängt von den Parametern ab.

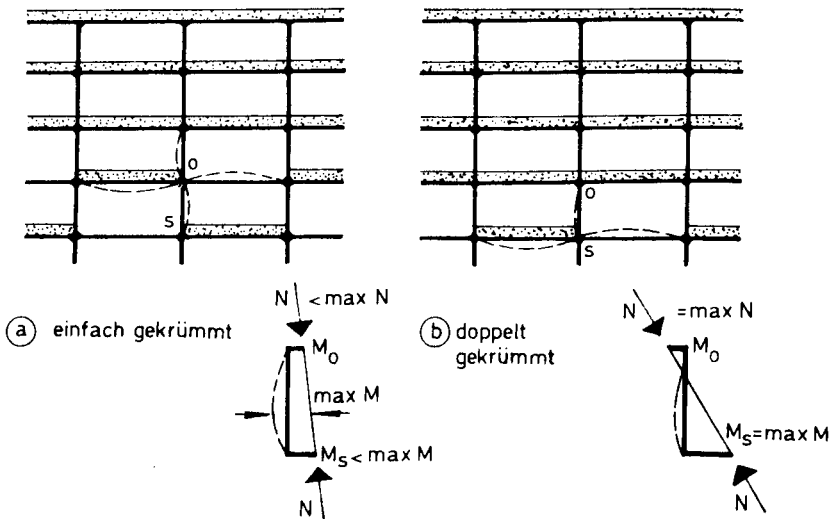
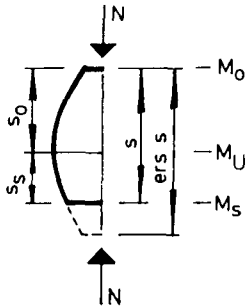


Abbildung 40 Beanspruchungen der Stiele eines unverschieblichen Rahmens

Für den Fall a) nach Abbildung 40 (einfach gekrümmter Verlauf der Verformung) läßt sich folgende Rückführung des ungleich ausmittig gedrückten Stabes auf den Stab mit gleich großen Endausmitten vornehmen, wenn für den Verlauf der Stabverformung näherungsweise eine Parabel zweiter Ordnung zugrunde gelegt wird: Als Ersatzstab mit der Länge e_s gelte der Stab mit $e_e = e_o = M_o/N$ als planmä-

Bügel, konstanter Lastausmitte.



Es gelten folgende Beziehungen:

$$(95) \quad \frac{s_s}{s_0} = \sqrt{\frac{M_U - M_S}{M_U - M_0}},$$

$$(96) \quad s_s = s_0 \sqrt{\frac{M_U - M_S}{M_U - M_0}},$$

$$(97) \quad s_s + s_0 = s_0 \left(1 + \sqrt{\frac{M_U - M_S}{M_U - M_0}}\right).$$

$$\text{ers } s = 2 \cdot s_0$$

$$(98) \quad \text{ers } s = \frac{2s_0}{1 + \sqrt{\frac{M_U - M_S}{M_U - M_0}}}$$

Gleichung (90) ergibt:

$$(99) \quad M_U = \frac{\text{ers } s^2}{F} \cdot N_U \cdot K_U + M_0.$$

ers s, durch Gleichung (98) ersetzt, ergibt:

$$M_U = \frac{(M_U - M_0) \cdot 4 \cdot s^2}{M_U - M_0 + 2 \sqrt{(M_U - M_0)(M_U - M_S)} + M_U - M_S} \cdot \frac{N_U \cdot K_U}{F} + M_0$$

$$2 \sqrt{(M_U - M_0)(M_U - M_S)} = \frac{4 s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} + M_S + M_0 - 2 M_U$$

$$4 [M_U^2 - M_U(M_S + M_0) + M_S \cdot M_0] = \left(\frac{4 s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} + M_S + M_0\right)^2$$

$$+ 4 M_U^2 - 4 M_U \left(\frac{4 s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} + M_S + M_0\right)$$

$$M_U \frac{16 s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} = \left(\frac{4 s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} + M_S + M_0\right)^2 - 4 M_S \cdot M_0$$

$$(100) \quad M_U = \frac{s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} + (M_S - M_0) \left(0,5 + \frac{M_S - M_0}{16 s^2 \cdot N_U \cdot K_U}\right) + M_0$$

Ist $M_U = M_S$, so gilt nach Gleichung (90) und (98):

$$M_S = \frac{4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} + M_O.$$

$$(101) \quad \frac{s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} = \frac{M_S - M_O}{4}$$

Gleichung (101) stellt das Kriterium dar, ob ein Traglastabfall durch die zusätzliche Stabverformung eintritt.

So lange

$$\frac{s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} = \frac{M_S - M_O}{4}$$

erfüllt ist, ist auch $M_U = M_S$, so daß M_S ausschließlich als Größtmoment die Traglast bestimmt. Eine Traglastminderung tritt erst für

$$\frac{s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} > \frac{M_S - M_O}{4}$$

ein. Dann erst braucht Gleichung (100) erfüllt zu werden. In diesem Falle ist $s = \text{grenz } s$ derjenige Wert der Stablänge s , von dem ab eine Minderung der Traglast durch die Stabverformung erfolgt.

$$(102) \quad \text{grenz } s = \sqrt{\frac{(M_S - M_O) \cdot F}{4 \cdot N_U \cdot K_U}}$$

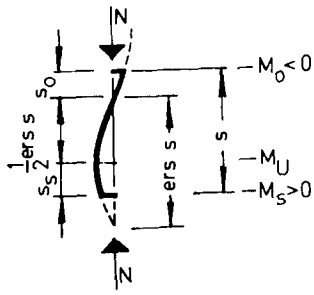
Die Bestimmung der Traglast der einfach gekrümmten Stütze mit ungleichen Endausmitten e_s und e_o kann folgendermaßen mit obigen Formeln erfolgen:

1. Zu einem vorgegebenen Grenzdehnungszustand werden die inneren Schnittgrößen N_U und M_U sowie die Stabkrümmung K_U bestimmt.
2. Es muß $M_U \geq M_S = N_U \cdot e_s$ erfüllt sein.

3. Nach Gleichung (102) wird $\text{grenz } s$ bestimmt, wobei sich F aus Gleichung (91) ergibt.
4. N_U ist Traglast, wenn für $s \leq \text{grenz } s$ $M_U = M_S$ erfüllt ist bzw. für $s > \text{grenz } s$ Gleichung (100).

Durch Variation des anzunehmenden Grenzdehnungszustandes kann die Traglast iterativ gefunden werden.

Für den Fall b) nach Abbildung 4o (doppelt gekrümmter Verlauf der Verformung) läßt sich eine Rückführung auf den zentrisch gedrückten Stab durchführen ($e_e = 0$).



$$(103) \quad s = s_s + \frac{1}{2} \text{ers } s + s_o$$

$$(104) \quad = \frac{1}{2} \text{ers } s \left[\sqrt{\frac{M_U - M_S}{M_U}} + 1 + \left(1 - \sqrt{\frac{M_U + M_O}{M_U}}\right) \right]$$

$$(105) \quad \text{ers } s = \frac{2 s}{2 + \sqrt{\frac{M_U - M_S}{M_U}} - \sqrt{\frac{M_U + M_O}{M_U}}}$$

$$(106) \quad \text{ers } s = \sqrt{\frac{M_U \cdot F}{N_U \cdot K_U}} = \frac{2 s \sqrt{M_U}}{2 \sqrt{M_U} + \sqrt{M_U - M_S} - \sqrt{M_U + M_O}}$$

$$(107) \quad 2 \sqrt{M_U} + \sqrt{M_U - M_S} - \sqrt{M_U + M_O} = 2 s \sqrt{\frac{N_U \cdot K_U}{F}}$$

Gleichung (107) ist zu erfüllen für $M_U > M_S$. Für $M_U = M_S$ kann aus Gleichung (107) der Grenzwert für $s = \text{grenz } s$ bestimmt werden, von dem ab ein Traglastabfall eintritt, dadurch daß $M_U > M_S$ wird.

$$(108) \quad 2 \sqrt{M_S} - \sqrt{M_S + M_O} = 2 \text{grenz } s \sqrt{\frac{N_U \cdot K_U}{F}}$$

$$(109) \quad \text{grenz } s = \sqrt{\frac{M_S \cdot F}{4 \cdot N_U \cdot K_U}} \quad (2 - \sqrt{\frac{M_S + M_0}{M_S}})$$

Die Bestimmung der Traglast kann analog zu dem für den Fall a) Gesagten erfolgen.

5.3 Rechenbeispiele

Zur besseren Veranschaulichung soll ein Rechenbeispiel angefügt werden, hierzu soll das erste Beispiel in [17] verwendet werden. Um nicht die Bruchschnittgrößen N_U und M_U für den vorzugebenden Grenzdehnungszustand berechnen zu müssen, wird für die Berechnung das Bemessungsdiagramm nach Abbildung 41 aus [12] benutzt, das den Verlauf der bezogenen Schnittgrößen n und m für eine Vielzahl mechanischer Bewehrungsanteile ω sowie auch die bezogene Stabkrümmung $K_U \cdot d$ im Grenzdehnungszustand angibt. Dieses Diagramm ist für den Eingang mit zulässigen Schnittgrößen vorgesehen, es enthält bereits die vorzusehenden Sicherheitszahlen, die entsprechend dem Entwurf zu DIN 1045, Ausgabe März 1968, vorgesehen sind. Hiernach beträgt $\nu = 1,75$, so lange die Stahlzugdehnung $\epsilon_{eZ} \geq 0,003$ ist. Für kleinere Stahlzugdehnungen im Grenzdehnungszustand wächst ν auf den Wert 2,1 an und ist im ganzen Bereich von Stadium I konstant 2,1.

Im folgenden Beispiel wird nur der Zugbruchbereich des Bemessungsdiagramms benutzt, in dem ν durchweg konstant, und zwar 1,75 ist. Das Beispiel in [17] hat jedoch einen Sicherheitsbeiwert von $\nu = 2,10$. Dieser Unstimmigkeit kann dadurch begegnet werden, daß das Beispiel für eine $2,1/1,75 = 1,20$ -fach erhöhte Normalkraft bei gleicher absoluter Lastausmitte durchgerechnet wird. Der Randabstand der Bewehrung in diesem Beispiel entspricht mit $h'/d = 0,0875$ nicht dem Verhältnis des Bemessungsdiagrammes, für das $h'/d = 0,1$ gilt. Weil der Zugbruchbereich maßgebend ist, kann diese Abweichung dadurch ausgeglichen werden, daß

der Wert für $h = 0,365$ m beibehalten wird, aber für die Querschnittshöhe $d = 0,365/0,9 = 0,405$ m an Stelle von $d = 0,400$ m gesetzt wird.

Das Bemessungsdiagramm benutzt alle Parameter als bezogene Größen. Es ist daher zweckmäßig, die verwendete Gleichung (100) ebenfalls für bezogene Parameter anzugeben.

$$(110) \quad n_U = \frac{N_U}{b \cdot d \cdot 0,7 \cdot B_n}$$

$$(111) \quad m_U = \frac{M_U}{b \cdot d^2 \cdot 0,7 \cdot B_n}$$

$$(112) \quad \omega = \frac{\mu \cdot \beta_s}{0,7 \cdot B_n} = \frac{F_e \cdot \beta_s}{b \cdot d \cdot 0,7 \cdot B_n}$$

Aus Gleichung (100) wird:

$$m_U = \frac{\left(\frac{s}{d}\right)^2 \cdot n_U \cdot K_U \cdot d}{F} + (m_s - m_o) \cdot \left(0,5 + \frac{m_s - m_o}{16 \left(\frac{s}{d}\right)^2 \cdot n_U \cdot K_U \cdot d}\right) + m_o \cdot$$

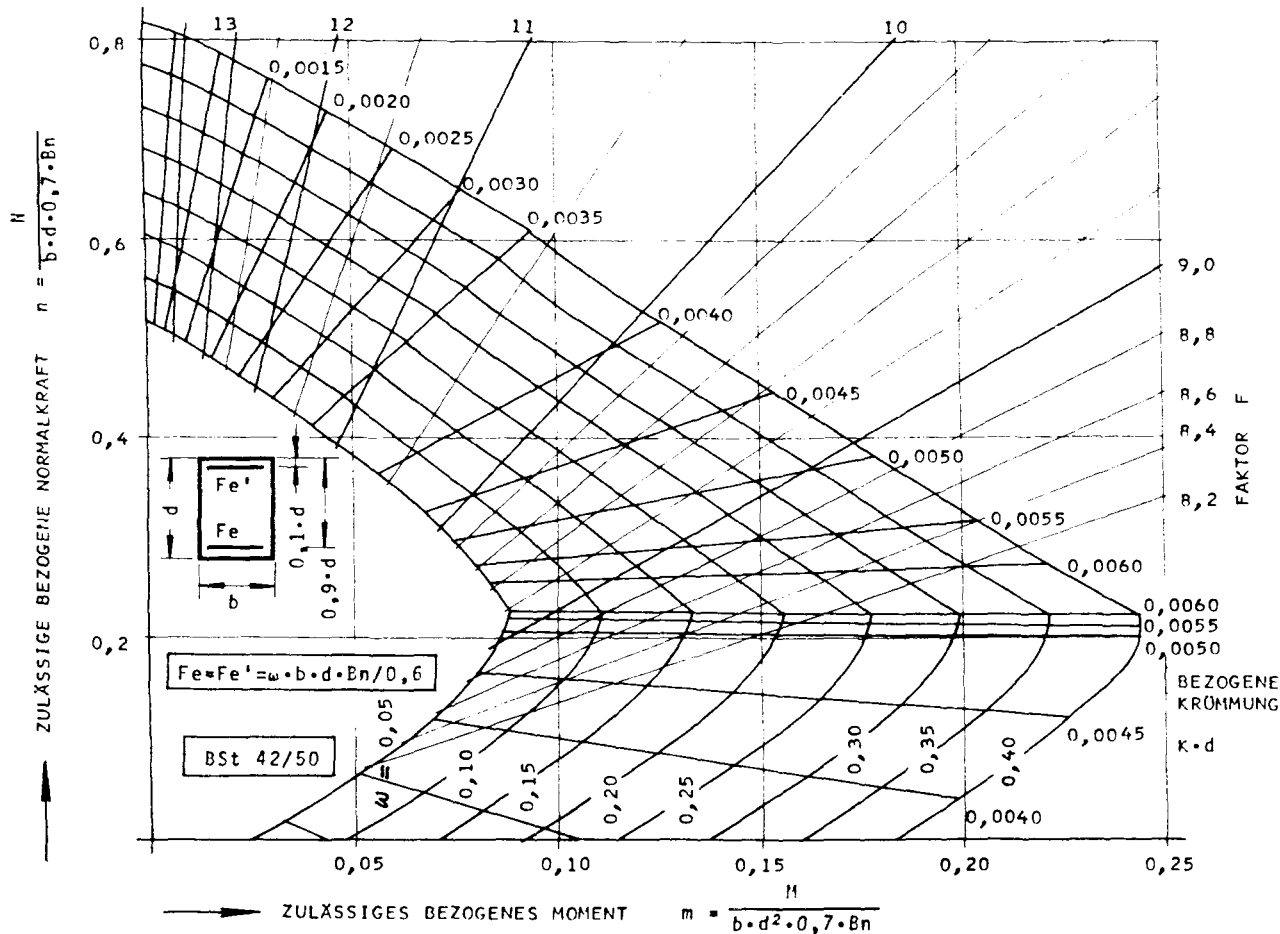
$$c = \frac{\left(\frac{s}{d}\right)^2 \cdot n_U \cdot K_U \cdot d}{F}$$

$$(113) \quad m_U = m_o + c + (m_s - m_o) \left(0,5 + \frac{m_s - m_o}{16 c}\right)$$

Durchführung des Rechenbeispiels

Ausgangswerte:

s/d	$= 9,00/0,405$	$= 22,2$
n_U	$= 1,2 \cdot 35,0 / (0,30 \cdot 0,405 \cdot 0,7 \cdot 3500)$	$= 0,141$
e_s/d	$= 10,0 / (35,0 \cdot 0,405)$	$= 0,705$
e_o/d	$= 0,5 \cdot 0,705$	$= 0,353$
m_s	$= 0,141 \cdot 0,705$	$= 0,0995$
m_o	$= 0,5 \cdot 0,0995$	$= 0,0498$



Ablesungen für das Rechenbeispiel:

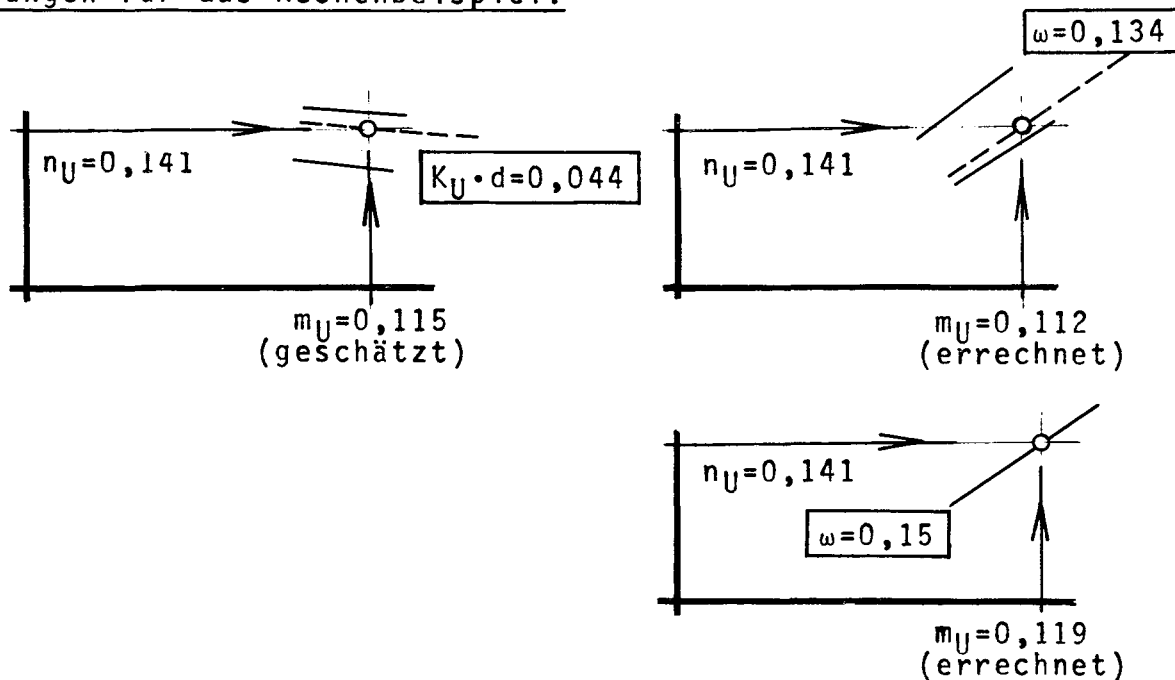


Abbildung 41

Bemessungsdiagramm aus [12] für den symmetrisch bewehrten Stahlbeton-Rechteckquerschnitt

Aus Gleichung (91):

$$F = \frac{18,5}{1+1,39\sqrt[3]{0,353}} = 9,3.$$

Geschätzt: $m_U = 0,115$.

Abgelesen im Bemessungsdiagramm für $n_U = 0,141$ und $m_U = 0,115$: $K_U \cdot d = 4,4 \cdot 10^{-3}$.

$$\frac{\left(\frac{s}{d}\right)^2 \cdot n_U \cdot K_U \cdot d}{F} = \frac{22,2^2 \cdot 0,141 \cdot 4,4 \cdot 10^{-3}}{9,3} = 0,0329$$

$$\frac{m_s - m_o}{4} = \frac{0,0995 - 0,0498}{4} = 0,0125$$

$0,0329 > 0,0125 \rightarrow$ Es tritt eine Traglastminderung ein, Gleichung (113) ist zu erfüllen.

$$\begin{aligned} m_U &= 0,0329 + 0,0498 \left(0,5 + \frac{0,0498}{16 \cdot 0,0329} \right) + 0,0498 \\ &= 0,0329 + 0,0297 / 0,0498 = 0,1124 \sim 0,115 \end{aligned}$$

Für $n_U = 0,141$ und $m_U = 0,112$ wird aus dem Bemessungsdiagramm abgelesen: $\omega = 0,134$.

$$\mu = 0,134 \cdot 0,7 \cdot 3500 / 42000 = 0,0078 = 0,78^\circ / o$$

Das Ergebnis stimmt erstaunlich gut mit demjenigen in [17] überein, wo $\mu = 0,89^\circ / o$ als Näherungswert bei Benutzung von Tafeln und $\mu = 0,78^\circ / o$ als Ergebnis einer programmgesteuert durchgeführten, genauen Rechnung angegeben ist.

Um den Unterschied im Ergebnis dieser Art der Bemessung gegenüber der Methode des Ersatzmomentes zu verdeutlichen,

soll auch die erforderliche Bewehrung für das Ersatzmoment bestimmt werden, wobei die Bemessung nach den Gleichungen (90) und (91) unter Zuhilfenahme des Bemessungsdiagramms erfolgen soll.

Ersatzmoment nach Gleichung (93):

$$\text{ers } m = 2/3 \cdot 0,0995 + 1/3 \cdot 0,0498 = 0,0830$$

$$\text{ers } e_e/d = 0,0830/0,141 = 0,59$$

$$F = \frac{18,5}{1+1,39 \sqrt[3]{0,59}} = 8,55$$

Für den geschätzten Wert $m_U = 0,115$ war $K_U \cdot d = 4,4 \cdot 10^{-3}$ abgelesen worden. Die auf bezogene Parameter abgestellte Gleichung (90) ergibt:

$$m_U = \frac{22,2^2 \cdot 4,4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,141}{8,55} + 0,0830$$
$$= 0,0358 + 0,0830 = 0,1188 \sim 0,115$$

Für $n_U = 0,141$ und $m_U = 0,119$ kann aus dem Bemessungsdiagramm abgelesen werden: $\omega = 0,150$.

$$\mu = 0,150 \cdot 0,7 \cdot 3500/42000 = 0,88^0/0$$

Die nach der Methode des Ersatzmomentes mit Gleichung (93) errechnete Bewehrung ist im vorliegenden Beispiel demnach 12⁰/0 größer als die errechnete Bewehrung nach der Alternativmethode.

5.4 Zusätzliche Angaben zur Durchführung der Bemessungsaufgabe

In den oben angeführten Rechenbeispielen waren Gleichung (90) und (113) nicht in der Art benutzt worden, um nur die Richtigkeit des angenommenen Wertes m_U zu überprüfen,

vielmehr dienten diese Gleichungen dazu, einen verbesserten Wert m_U zu einem vorgegebenen zu bestimmen, so daß sich der richtige Wert m_U durch Iteration ergibt. Die geringe Veränderlichkeit der bezogenen Krümmung $K_U \cdot d$ mit dem bezogenen Moment m_U im Zugbruchbereich ergibt im Regelfall im ersten Rechenschritt einen genügend genauen, verbesserten Wert m_U , da der nächste Iterationsschritt mit einem nicht merklich geänderten Wert $K_U \cdot d$ durchzuführen wäre. Dieser Umstand verwischt den eigentlichen Iterationscharakter obigen Bemessungsverfahrens derart weitgehend, daß es praktisch den Charakter eines direkten Bemessungsverfahrens erhält, worunter verstanden werden soll, daß zu den meist vorgegebenen Ausgangsparametern, wie Schnittgrößen, Systemabmessungen und Materialwerten, die erforderliche Bewehrung direkt bestimmbar ist.

Die Durchführung dieser Art der Bemessung für den Fall doppelt gekrümmten Verlaufes der Stabverformung ist zunächst dadurch erschwert, daß Gleichung (107) analytisch nicht in einfacher Weise nach M_U bzw. m_U aufgelöst werden kann. Hierzu dient das Lösungsdiagramm der Abbildung 42, aus dem für die auf $4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U / F$ bezogenen dimensionslosen Eingangswerte M_S^* und M_O^* der dimensionslose Wert M_U^* abgelesen werden kann.

Es ist

$$(114) \quad M_S^* = \frac{M_S \cdot F}{4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U}$$

$$(115) \quad M_O^* = \frac{M_O \cdot F}{4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U}$$

und

$$(116) \quad M_U^* = \frac{4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F \cdot \frac{1}{M_U}}$$

Durch das Diagramm der Abbildung 42 wird auch die Auswertung der Gleichung (109) ersetzt, was zur Überprüfung

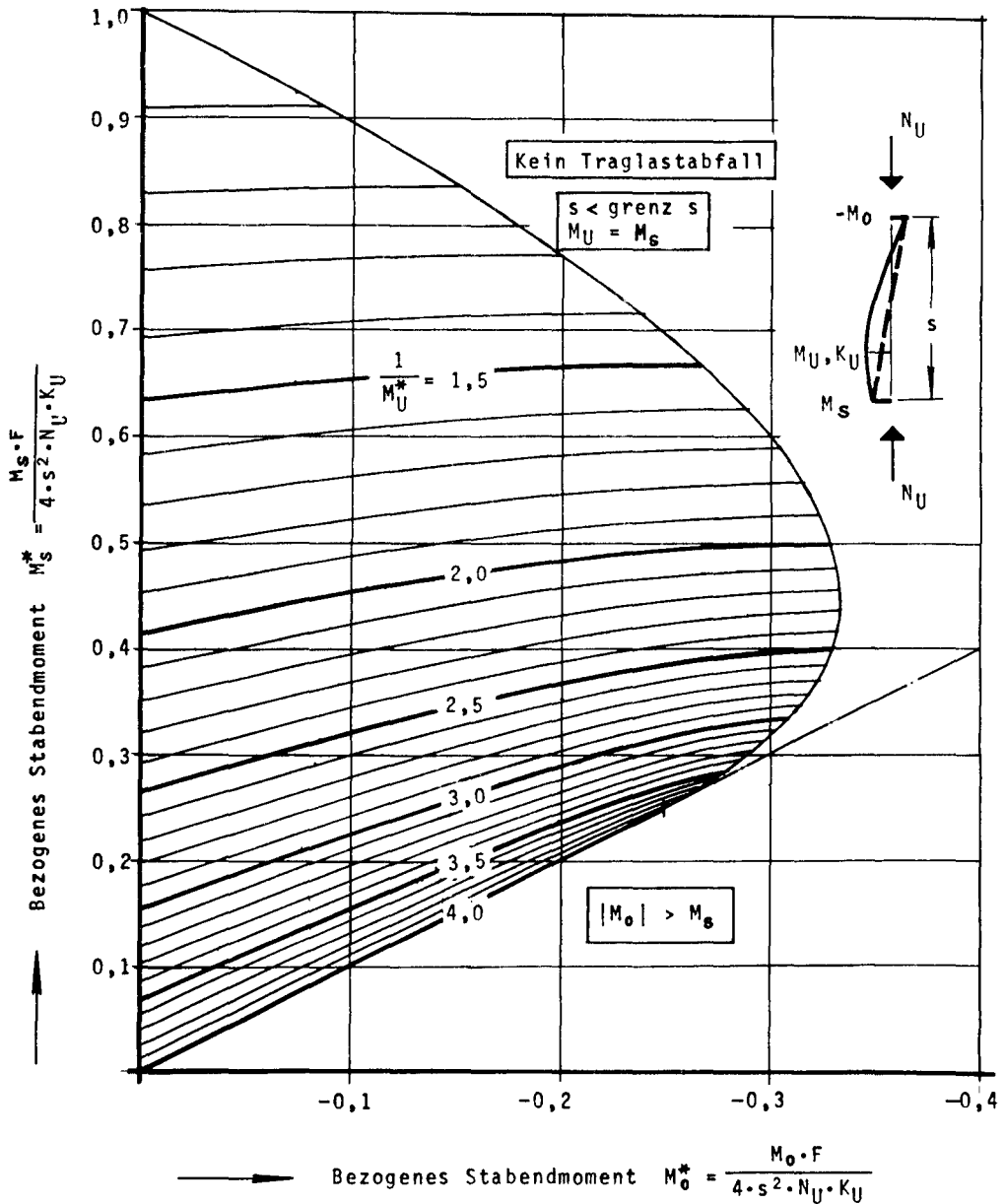


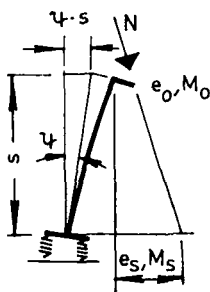
Abbildung 42 Diagramm zur Lösung von Gleichung (107)

$$M_U = \frac{4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F \cdot \frac{1}{M_U^*}}$$

diente, ob ein Traglastfall überhaupt vorliegt, dadurch daß $s > \text{grenz } s$ wird. Ein Abfall der Traglast tritt ein, wenn durch M_S^* und M_O^* ein Punkt innerhalb der parabelförmigen Fläche des Diagramms markiert wird. Nur hier ist $M_U^* \geq M_S^*$; außerhalb dieser Fläche ist $s < \text{grenz } s$ und deshalb $M_U = M_S$.

6. Der einseitig eingespannte, frei verschiebbliche Stab

Ähnliche vereinfachte Beziehungen, wie sie im vorangegangenen Abschnitt für den Stab mit ungleichen Endausmitten, aber festgehaltenen Stabenden abgeleitet wurden, lassen sich natürlich auch für den einseitig eingespannten, an einem Ende aber frei verschiebblichen Stab angeben. Unter Einrechnung einer Knotendrehung der Einspannstelle beträgt das Maximalmoment M_U an dieser Stelle:



$$(117) \quad M_U = N_U \cdot s \left(\psi + \frac{4 \cdot s \cdot K_U}{F} \right) + M_s$$

Kann der Knotendrehwinkel ψ als elastische Fundamentdrehung, in der Form

$$(118) \quad \psi = c_\psi \cdot M$$

errechnet werden, so läßt sich ψ auf einfache Weise aus Gleichung (117) eliminieren:

$$(119) \quad M_U = N_U \cdot s \cdot c_\psi \cdot M_U + \frac{4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} + M_s.$$

$$(120) \quad M_U = \frac{\frac{4 \cdot s^2 \cdot N_U \cdot K_U}{F} + M_s}{1 - s \cdot c_\psi \cdot N_U}$$

Der Faktor F ist aus Gleichung (91) für $e_e = e_o$ zu bestimmen.

Gleichung (120) erscheint geeignet zur Anwendung auf das oben skizzierte System der frei auskragenden Stütze. Eine Anwendung auch auf die Stiele eines verschiebblichen Rahmens, entsprechend der im vorangegangenen Abschnitt vorgenommenen Anwendung der Formeln für die beidseits frei drehbar gelagerte Stütze auf die Stiele eines unverschiebblichen Rahmens, muß sicherlich dadurch zweifelhaft erscheinen, als bis zu diesem Zeitpunkt keine Kenntnis darüber besteht,

ob die Knotendrehung insbesondere bei Annäherung an den Erschöpfungszustand in Stahlbetonkonstruktionen auch nur annähernd linear elastisch bleibt. Diese Frage kann hier nicht weiter erörtert werden. Gelänge es allerdings, eine hinreichend einfache Gesetzmäßigkeit für die Knotendrehung ψ in Stahlbetonkonstruktionen im Bereich des Erschöpfungszustandes anzugeben, die zu einer ähnlichen Formel führte wie Gleichung (120), so ließe sich dann auf nachstehend dargestellte Art und Weise den Stielen eines verschieblichen Rahmens nach Abbildung 43 ein Ersatzstab zuweisen. Dabei müßte der Momentennullpunkt in den Stielen in halber Stockwerkhöhe liegen, was bei nicht übermäßiger Unterschiedlichkeit in den Systemsteifigkeiten zutrifft.

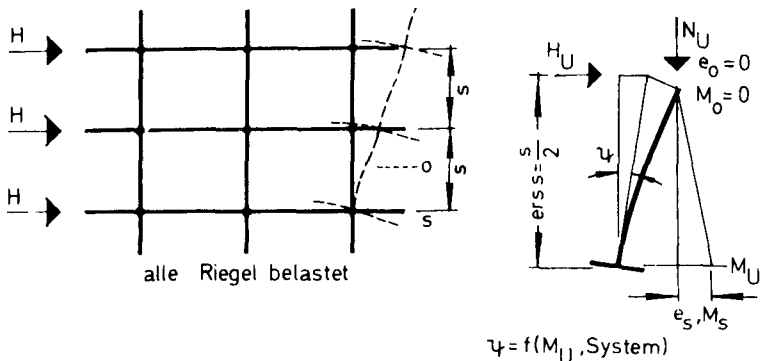


Abbildung 43 Ersatzstab für die Stiele eines verschieblichen Rahmens

Die Berechnung einer gesetzmäßigen Abhängigkeit zwischen dem Knotendrehwinkel ψ und dem Stielendmoment M_U mit Hilfe der Elastizitätstheorie erscheint in gleichem Maße wirklichkeitsnahe zu sein wie die Anwendung der Elastizitätstheorie zur Bestimmung der Knicklänge, die dann als Länge des Ersatzstabes eingeführt wird. Die Herleitung der Knotendrehung ψ auf Grund der Elastizitätstheorie ist aber zweifellos nicht aufwendiger als die Bestimmung der Knicklänge, so daß unter diesen Voraussetzungen die bis-

herige gebräuchliche Verfahrensweise mit den Anleihen bei der klassischen Knicktheorie der Elastizitätstheorie zugunsten der ebenfalls einfachen und dem vorliegenden reinen Verformungsproblem näherstehenden Methoden aufgegeben werden kann. Eine einwandfreie Beurteilung ließe sich nur durch Vergleiche beider Methoden mit wirklichkeitsnahen Traglastberechnungen solcher Rahmensysteme gewinnen, auf die leider solange verzichtet werden muß, als derartige Untersuchungen nicht abgeschlossen sind.

Die in [20] zu diesem Thema getroffenen Feststellungen, wonach die bisher geübte Praxis für den Nachweis der Stiele in Rahmenkonstruktionen nach dem sogenannten Ersatzstabverfahren nunmehr durch eine Berechnung des Gesamtsystems nach Theorie II. Ordnung ersetzt werden sollte, entsprechen dem oben Gesagten voll und ganz. Weil solche Verfahren auch die Berücksichtigung einer Vergrößerung der Momente in den anschließenden Stäben mitbeinhalten, für die kein eigentlicher "Knicksicherheitsnachweis" zu führen ist, sind sie mit Rücksicht auf die stets zu berücksichtigenden Sicherheitsanforderungen sogar vorzuziehen. Kritisch ist lediglich der in [20] gemachte Vorschlag aufzunehmen, daß für den Traglastzustand mit einer einheitlichen Reduktion der Steifigkeiten auf die Hälfte des nominellen Wertes für den Bereich der Gebrauchslasten zu rechnen ist, ohne Rücksicht auf die Art der Beanspruchung des betreffenden Bauteiles. Der zweifellos einfachen Durchführung auf Grund einer so weitgehenden Vereinfachung können Bedenken gegenüber stehen, ob diese Methode genügend wirklichkeitsnah ist.

Die bekannte Beziehung $K = M/EI$ läßt sich mit Hilfe von Gleichung (90), die durch Multiplikation mit N auf M abzustellen ist, zu einer Ersatzsteifigkeit $ers EI$ des Stabes umformen wobei die Beanspruchung des Stabes dadurch miterfaßt wird, daß die Werte für Krümmung und Schnittgrößen im Traglastzustand mitverwendet werden:

$$(121) \quad e_U - e_e = \frac{s^2 \cdot K_U}{F} = \frac{s^2 \cdot M_U}{\pi^2 \cdot \text{ers EI}}$$

$$(122) \quad \text{ers EI} = \frac{F \cdot M_U}{10 \cdot K_U}$$

Die benötigten Werte F , M_U und K_U können direkt aus dem Bemessungsdiagramm, Abbildung 41, entnommen werden. Die nach Gleichung (122) erhaltenen Werte für die Ersatzsteifigkeit ers EI ergeben, daß das Verhältnis von Ersatzsteifigkeit und nominellem Wert $E_0 I$ nach der Elastizitätstheorie von den Baustoffparametern beeinflusst ist und in weiten Grenzen zwischen 0,2 und 0,8 liegt, wie es Abbildung 44 zeigt, das bereits früher für [18] vom Verfasser aufgestellt worden ist. Eine der Wirklichkeit nahe kommende Anpassung der gewählten Ersatzsteifigkeit kann demnach ohne Schwierigkeiten bei Bedarf mit Gleichung (122) und bei Verwendung des Bemessungsdiagramms der Abbildung 41 durchgeführt werden.

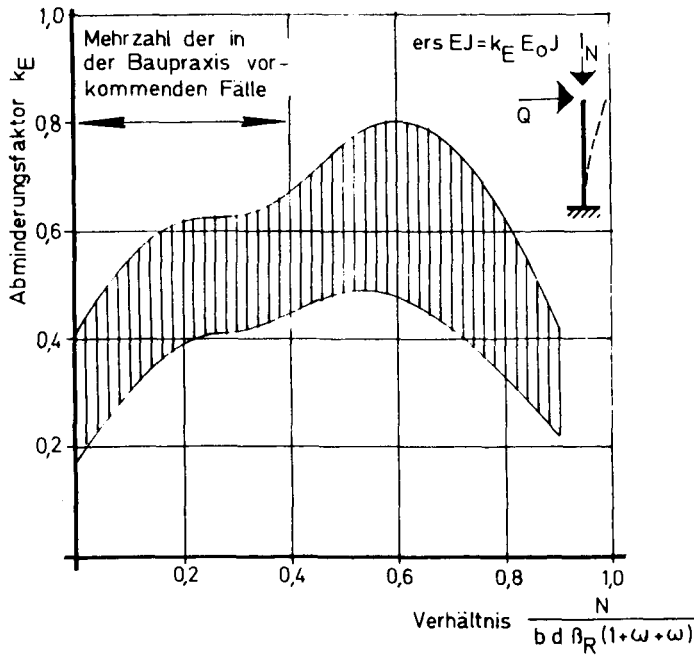


Abbildung 44 Ersatzsteifigkeit einer Stahlbetonstütze unter kritischer Last. Hüllkurven für den Bereich: B 225 bis B 450
B St 22/34 bis B St 42/50
 $\mu = \mu' = 0,4$ bis 1,0%

7. Zusammenfassung

Analog zu der Lösung des beliebig ausmittig gedrückten schlanken Stabes im Bereich der klassischen Elastizitätstheorie, - für die die direkte Proportionalität zwischen Stabkrümmung K und Biegemoment M gilt, - wird in der vorliegenden Arbeit zunächst die Lösung für einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Moment und Krümmung in der Form $M = a_1 K + a_2$ abgeleitet. Hierdurch wird eine wenn auch nur begrenzt mögliche Anwendung der analytischen Methode für Stahlbetonstäbe, insbesondere Stützen, eröffnet, dadurch daß der mehr oder weniger polygonartige Verlauf der Moment-Krümmungsbeziehung für Stahlbeton im Zugbruchbereich bereichsweise durch eine Gerade angenähert wird.

Größere Bedeutung als diese erweiterte analytische Methode haben die in jüngster Vergangenheit von verschiedenen Seiten mitgeteilten Verfahren zur rein numerischen Lösung des Traglastproblems. Die grundsätzlichen Möglichkeiten solcher Verfahren und die Verschiedenheiten der bisher veröffentlichten werden systematisch aufgezeigt, in diesem Zusammenhang werden die Methoden des Verfassers erläutert, die zur Ermittlung des Moment-Krümmungszusammenhanges und zur numerischen Integration der grundlegenden Differentialgleichung besonders dann geeignet sind, wenn eine breite Darstellung der Traglasten in Form von Traglastdiagrammen erwünscht ist. Die Genauigkeit dieser numerischen Verfahren ist, für praktische Aufgaben geurteilt, sehr groß.

Es ist selbstverständlich, daß Berechnungen nach solchen Methoden heutzutage programmgesteuert auf elektronischen Rechenanlagen durchgeführt werden. Das Vorhandensein eines solchen Programms eröffnet dann die Möglichkeit, die Auswirkungen beliebiger Vereinfachungen zu studieren.

Der Vereinfachung der numerischen Integration für einen nichtlinearen Moment-Krümmungszusammenhang galten die ersten Bemühungen. Das Ergebnis war, daß die Annahme eines

parabelförmigen Verlaufes der Krümmung über die Stablänge für die Berechnung der Stabausbiegung im Traglastzustand die beste Übereinstimmung mit einer programmgesteuert durchgeführten Berechnung zeigt. Weniger gute Ergebnisse liefern die Annahme eines linearen Krümmungsverlaufes sowie die Annahmen eines sinusförmigen oder eines ausschnittsweise sinusförmigen Verlaufes. Mit einer solchen Vereinfachung läßt sich bereits eine hinreichend einfache Bestimmung der Verformungen eines ausmittig gedrückten Stahlbetonstabes nach Theorie II. Ordnung durchführen, wenn zusätzlich der Moment-Krümmungszusammenhang in zweckmäßiger Form dargestellt wird. An einem Beispiel wird die Traglastermittlung zu einem Stützenversuch gezeigt, wobei in Abbildung 24 der Moment-Krümmungszusammenhang in Form eines Diagramms dargestellt ist, auf dessen Achsen die Normalkraft N und die Stabkrümmung K aufgetragen sind und das den Verlauf der Linien konstanter Lastausmitte $e = M/N$ enthält.

Der Traglastzustand einer Stahlbetonstütze kann dadurch gekennzeichnet sein, daß in einem Querschnitt der definierte Grenzzustand für die Beanspruchung erreicht ist, oder aber auch dadurch, daß vor Erreichen eines solchen Grenzzustandes die Stabilität des belasteten und verformten Stabes verloren geht. Es gibt also kein ausschließliches Traglastkriterium. Dieser Umstand gestaltet die Lösung des Traglastproblems daher so aufwendig. Durch Begrenzung der ausnutzbaren Dehnungen auf Werte, die unterhalb der für Bruchberechnungen sonst anzunehmenden Werte liegen, kann jedoch der Bereich derjenigen Fälle, in denen die Traglast durch Stabilitätsverlust des Stabes begrenzt ist, derart eingeengt werden, ohne daß hierdurch die Traglast in ihrem Wert praktisch spürbar beeinflußt wird, daß das Erreichen des Grenzzustandes mit reduzierten Dehnungswerten stellvertretend für das fehlende eindeutige Traglastkriterium angesehen werden kann.

Dieses ersatzweise geltende Traglastkriterium zusammen mit den Vereinfachungen zur Bestimmung der Verformung ergeben einen für praktische Berechnungen geeigneten Formelapparat. Die mit ihm errechneten Traglasten stimmen sowohl mit den exakten, programmgesteuert ermittelten Traglasten gut überein als auch mit den in Versuchen gemessenen, wie entsprechende Gegenüberstellungen zeigen.

Die gefundenen Vereinfachungsmöglichkeiten gelten nicht nur für den einfachen Fall der frei drehbar gelagerten Stütze mit gleich großen Lastausmitten an den Stabenden, sondern in erweiterter Form auch für die frei drehbar gelagerte Stütze mit ungleichen Endausmitten, die als Ersatzstab den Stielen eines unverschieblichen Rahmens zugeordnet werden kann. Hierdurch kann die Bemessung solcher Stützen besser als bisher in Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Tragmechanismus durchgeführt werden. Das derzeitige Verfahren, das für solche Stützen zunächst eine Ersatzstablänge, und zwar die theoretische Knicklänge gemäß der klassischen Elastizitätstheorie vorsieht und außerdem eine Ersatzlastausmitte festlegt, ist weder einfacher noch verständlicher in der Durchführung.

Der letzte Abschnitt befaßt sich mit der einseitig eingespannten, frei verschieblichen Stütze. Auf sie angewendet ergeben die gefundenen Vereinfachungsmöglichkeiten ebenfalls sehr einfache Zusammenhänge. Ob dieser Stützenfall als Ersatzstab für die Stiele eines verschieblichen Rahmens dienen kann, hängt im wesentlichen nur von der Frage ab, ob die einzufügende Knotendrehung der Einspannstelle mit ausreichender Genauigkeit für den Traglastzustand bestimmt werden kann. Wird dieses Problem in der Form gelöst, daß das Gesamtsystem für den Traglastzustand nach Theorie II. Ordnung berechnet wird, so bieten die angegebenen Vereinfachungen die Möglichkeit, einen weitgehend zutreffenden Wert für eine in die Rechnung einzuführende Ersatzsteifigkeit abzuleiten.

C. Schrifttumsangaben

- [1] SCHWARZ, Heinz, u. Karl-Heinz KASPAREK: Ein Beitrag zur Klärung des Tragverhaltens exzentrisch beanspruchter Stahlbetonstützen. Der Bauingenieur 42 (1967) Nr. 2, S. 84/90.
- [2] FFRANG, E. O., u. Ch. P. SIESS: Analytical study of the behavior of long restrained concrete columns subjected to eccentric loads. Structural Research Series No. 214, Civil Engineering Studies, University of Illinois, 1961.
- [3] BREEN, John Edward: The restrained long concrete column as a part of a rectangular frame. Ph.D. Dissertation, University of Texas, 1962.
- [4] BLASER, Albrecht: Knicken von Stahlbetonstäben mit Rechteckquerschnitt unter Kurzzeitbelastung, Berechnung mit Hilfe von automatischen Digitalrechenanlagen. Schriftenreihe Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb) (1966), H. 180.
- [5] de GROOT, A.K., u. A.C. van RIEL: De stabiliteit van kolommen en wanden van ongewapend beton. Heron 15 (1967), Nr. 3/4, S. 65/112.
- [6] CRANSTON, W.B.: A computer method for inelastic analysis of plane frames. Technical Report, Cement and Concrete Association, 1965.
- [7] QUAST, Ulrich: Näherungsweise Berechnung der Traglasten ausmittig belasteter Stahlbeton-Druckglieder. Beton- und Stahlbetonbau 62 (1967), Nr. 5, S. 118/121.
- [8] AAS-JAKOBSEN, A.: Rapport préliminaire a la session pléniere de Lausanne - 1968. Comité Européen du Béton, Flambement (Documentation préliminaire), 1968.
- [9] KUPFER, Herbert: Bemessungsverfahren für knickgefährdete Stahlbetonstützen. (unveröffentlichte Arbeit), 1965.
- [10] ROBINSON, J.R., u. S.S. MODJABI: La prévision des charges de flambement des poteaux en beton armé par la méthode de M.P. Faessel. Ann. Institut Techn. du Bâtiment et des Travaux Publics 21 (1968), No. 249, S. 1297/1316.
- [11] QUAST, Ulrich: Untersuchungen über den Gültigkeitsbereich verschiedener Näherungsformeln zur Berechnung des bezogenen Zusatzmomentes. Comité Européen du Béton Bulletin d' Information No. 69, 1968.

- [12] QUAST, Ulrich: Bemessungsverfahren für knickgeführte Stahlbetondruckglieder. Mitteilung des Lehrstuhls für Massivbau an der Technischen Universität Braunschweig, 1968.
- [13] CAMPUS, F. u. C. MASSONET: Recherches sur le flambement du colonnes en acier A 37, a profil en double T_e, sollicitées obliquement. Comptes Rendus de Recherches, IRSIA, 1956.
- [14] KORDINA, Karl: Knicksicherheitsnachweis ausmittig belasteter Druckglieder. Beton- u. Stahlbetonbau 59 (1964), Nr. 8, S. 181/189.
- [15] MacGREGOR, S.G.: Discussion of revisions to section CR 4.14 - buckling. Comité Européen du Béton, 1968.
- [16] FERGUSON, Phil. M.: Columnas largas de concreto reforzado en estructuras. Revista IMCYC 3 (1965), Nr. 13.
- [17] KASPAREK, Karl-Heinz: Über den Einfluß der Bewehrung und des Schnittkraftverlaufes auf die Traglasten exzentrisch beanspruchter Stahlbetondruckglieder mit Rechteckquerschnitt, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1968.
- [18] KORDINA, Karl: Die Grundlagen des Knicksicherheitsnachweises im Stahlbetonbau. Deutscher Beton-Verein e.V., Vorträge auf dem Betontag 1967, S. 245/174.
- [19] QUAST, Ulrich: Die Bemessung ausmittig belasteter Stahlbetondruckglieder. VDI-Zeitschrift 110 (1968), Nr. 11, S. 425/431
- [20] FEY, Tankred: Vereinfachte Berechnung von Rahmensystemen des Stahlbetonbaues nach Theorie II. Ordnung. Der Bauingenieur 41 (1966), Nr. 6, S. 231/238.

Lebenslauf und Bildungsgang

- 7.4.1937 geboren in Buschdorf, Krs. Flatow
- 1943 - 1948 Besuch der Volksschule mit Unterbrechungen durch die Vertreibung und das Kriegsende in Buschdorf, Bremen und Delmenhorst
- 1948 - 1957 Besuch der Oberschule in Delmenhorst, die letzten Jahre im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig
- 5.3.1957 Reifeprüfung
- 1.4. - 30.9.1957 Tätigkeit als Praktikant
- 14.10.1957 Immatrikulation an der Technischen Hochschule Braunschweig, Fachrichtung Bauingenieurwesen. Während des Studiums insgesamt 9 Monate in Entwurfbüros tätig sowie 2 mehrmonatige Auslandspraktika in Spanien
- 5.12.1962 Diplom-Hauptprüfung, Hauptfach: Konstruktiver Ingenieurbau
- 21.1.1963 - 31.3.1965 Technischer Angestellter im Konstruktionsbüro der Hauptverwaltung der Dyckerhoff & Widmann KG in München
- 1.4.1965 - 30.6.1969 Zunächst wissenschaftlicher Angestellter und später wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl und Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau bei Professor Dr.-Ing. K. Kordina